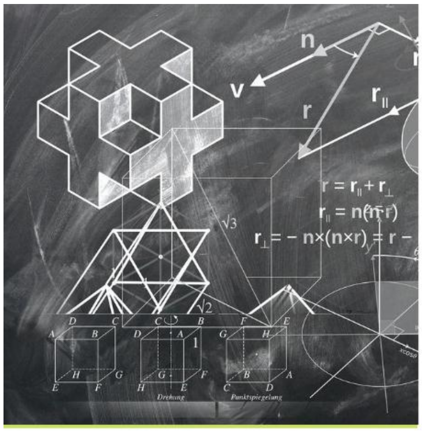
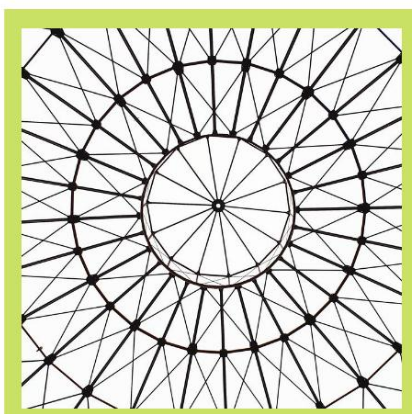
EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Dirección General de Educación Tecnológica
Agropecuaria y Ciencias del Mar



GEOMETRÍA ANALÍTICA

CUADERNILLO para el estudiante



ASESORÍA ACADÉMICA

TERCER SEMESTRE

Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

Créditos

Desarrollo de Contenido

Benjamín Morán Medina

Martha Nayelli Rojas Bautista

Rafael Gil Mantilla

Víctor Manuel Talamante Estrada

Revisión técnico – pedagógica

Arit Furiati Orta

Itandehui García Flores

Judith Doris Bautista Velasco

Primera edición

Septiembre 2020

México

Introducción

El cuadernillo de Asesorías Académicas de la asignatura de Geometría Analítica, forma parte de una colección de recursos de apoyo para jóvenes estudiantes de los Centros de Bachillerato Tecnológico Agropecuario (CBTA), Centros de Bachillerato Tecnológico Forestal (CBTF), Centros de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales (CETAC), Centros de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMAR), los cuales tienen el propósito de ofrecerte elementos para lograr los aprendizajes requeridos y favorecer tu desarrollo académico.

En la primera sección hay aspectos relacionados con la Asesoría Académica que te permitirán ubicarla como elemento de apoyo a tu trayectoria académica.

En la segunda sección hay actividades que te ayudarán a ubicar tus áreas de oportunidad, partiendo de la recuperación de tus aprendizajes; así mismo, podrás reforzar aspectos conceptuales que faciliten la comprensión del contenido disciplinar, y a la vez, se convierten en apoyo para promover la comprensión lectora y el desarrollo de tu perspectiva crítica.

Encontrarás actividades de reflexión, análisis, lecturas, ejercicios, juegos, problemas a resolver, entre otras, que podrás poner en práctica para comprender que la geometría analítica ayuda a comprender el entorno inmediato, pues nos favorece el desarrollo de estrategias para el tratamiento de lugares geométricos, utilizando sistemas coordenados para ubicarse en un plano y, sobre todo, fomenta la incorporación de métodos analíticos a problemas geométricos y que te ayudan a resolver y comprender problemas cotidianos.

Esperamos que este material constituya una herramienta valiosa para tu formación y sea útil para apoyar tu proceso de aprendizaje de manera creativa.

La Asesoría Académica

La asesoría académica es un servicio a través del cual encontrarás apoyo para favorecer el logro de tus aprendizajes. Se brinda mediante sesiones de estudio adicionales a la carga horaria reglamentaria y se te apoya para despejar dudas sobre temas específicos. También se te recomiendan materiales adicionales (bibliografía complementaria, ejercicios, resúmenes, tutoriales, páginas web, entre otros), de los que podrás apoyarte para el estudio independiente y evitar el rezago académico.

La asesoría académica puede ser:

a) Preventiva: acciones con los alumnos que tienen bajo aprovechamiento académico, han reprobado evaluaciones parciales o no lograron comprender algún contenido curricular, y que requieren apoyo para adquirir o reforzar aprendizajes específicos de alguna asignatura, módulo o submódulo. Consiste en lograr que el alumno mejore la calidad de sus aprendizajes, incremente su rendimiento académico y evite la reprobación.

b) Remedial: son acciones con los alumnos que al finalizar el semestre han reprobado alguna asignatura, módulo o submódulo y requieren apoyo académico para mejorar los aprendizajes frente a las evaluaciones extraordinarias y en general para alcanzar los aprendizajes establecidos en el programa de estudios correspondiente. Su propósito es que los alumnos regularicen su situación académica y eviten el abandono escolar.

Índice temático

Estructura didáctica

Cada lección se estructura por las siguientes secciones:

Explorando

Sección dirigida a reconocer tu nivel de conocimiento sobre la temática a abordar, puede contener preguntas abiertas, reactivos de opción múltiple ejercicios, actividades, entre otros. Apoya en la detección de las necesidades formativas de los estudiantes, lo que permitirá tomar decisiones sobre las actividades de asesoría que se pueden desarrollar.

Practicando

Promueve la ejercitación e integración de contenidos que se abordan en la lección. Refiere el desarrollo de estrategias centradas en el aprendizaje (elementos didácticos para brindar orientaciones a partir de ejercicios como resolución de problemas, dilemas, casos prácticos.). Permite poner en práctica lo revisado en la sección de habilidad lectora y facilita el aprendizaje de los contenidos temáticos.

Comprendiendo

Se trabaja con lecturas que brindan elementos para la comprensión de los contenidos (temáticas) que se abordan en la asesoría académica y promueve la habilidad matemática y comprensión lectora, constituye un elemento para el estudio independiente.

Auto evaluación

Aporta elementos para que te autoevalúes y tomen junto con tu asesor académico medidas oportunas para continuar con tu proceso de aprendizaje.

Investigando

Se te proporcionan recomendaciones sobre recursos de apoyo y material centrado en áreas específicas, para fortalecer la temática estudiada.

Lección 1. Ubicación de coordenadas.

Explorando

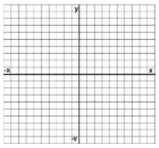
Responde cada uno de los planteamientos

1. Es la rama de las matemáticas dedicada al estudio en profundidad de las figuras geométricas y sus respectivos datos, tales como áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección, ángulos de inclinación, entre otros. Además, utiliza un sistema de coordenadas.

a) Algebra
b) aritmética
c) Geometría analítica

2. ¿Cuál de las siguientes imágenes es un plano cartesiano?

a) 

b) 

c) 

3. ¿Cuál de las siguientes líneas es horizontal?

a)

b)

c) 

4. Subraya la opción que contenga una línea vertical

a)

b)

c) 

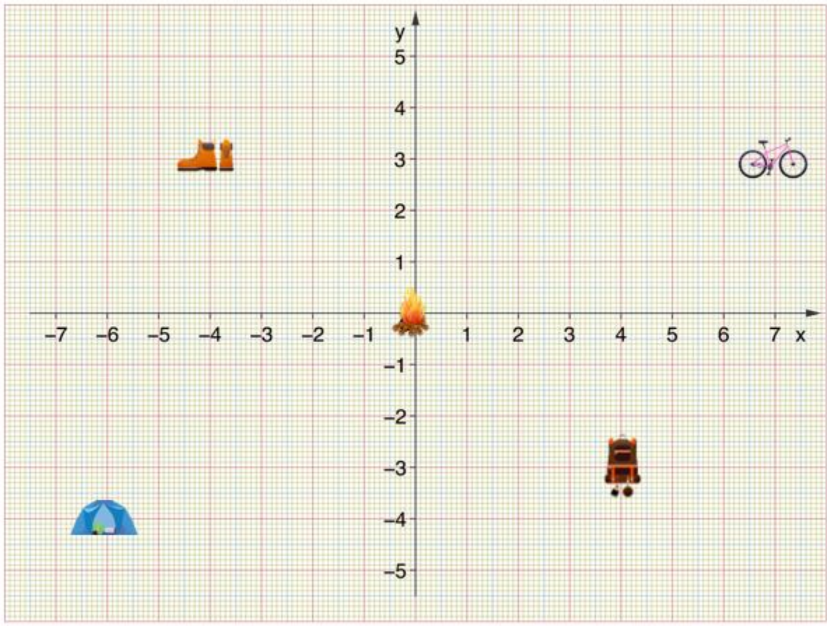
5. Son líneas perpendiculares.

a) 

b) 

c) 

¿Qué tanto recuerdas? Observa la siguiente imagen y responde a cada uno de los cuestionamientos



1. Las botas se encuentran en la coordenada:

a) (5,2)

b) (-4,3)

c) (7,2)

2. En la coordenada (7,3) se ubica la:

a) mochila

b) casa de campaña

c) bicicleta

3. En el origen se ubica la fogata.

a) Cierto

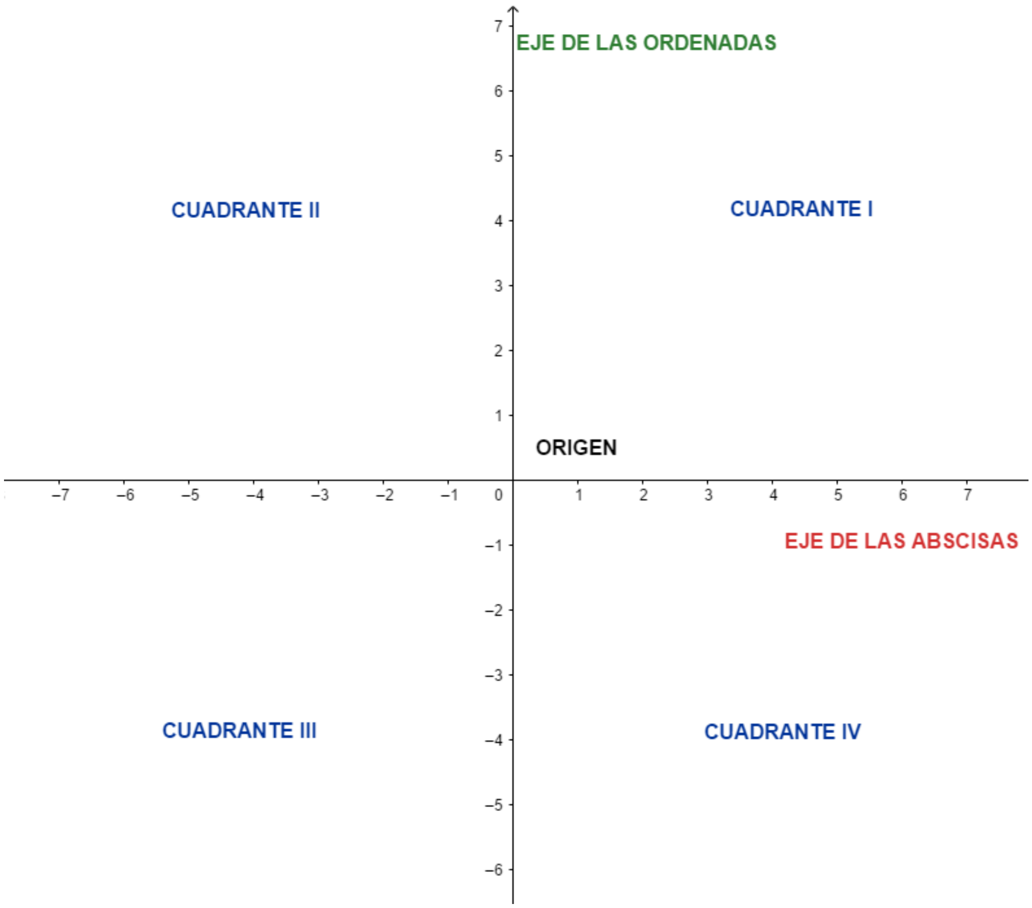
b) Falso

Comprendiendo

Plano cartesiano

El plano cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares que intersecan en el punto 0, llamado también origen. La línea horizontal representa el eje de las abscisas o el eje de las X; la línea vertical es el eje de las ordenadas o eje de las Y.

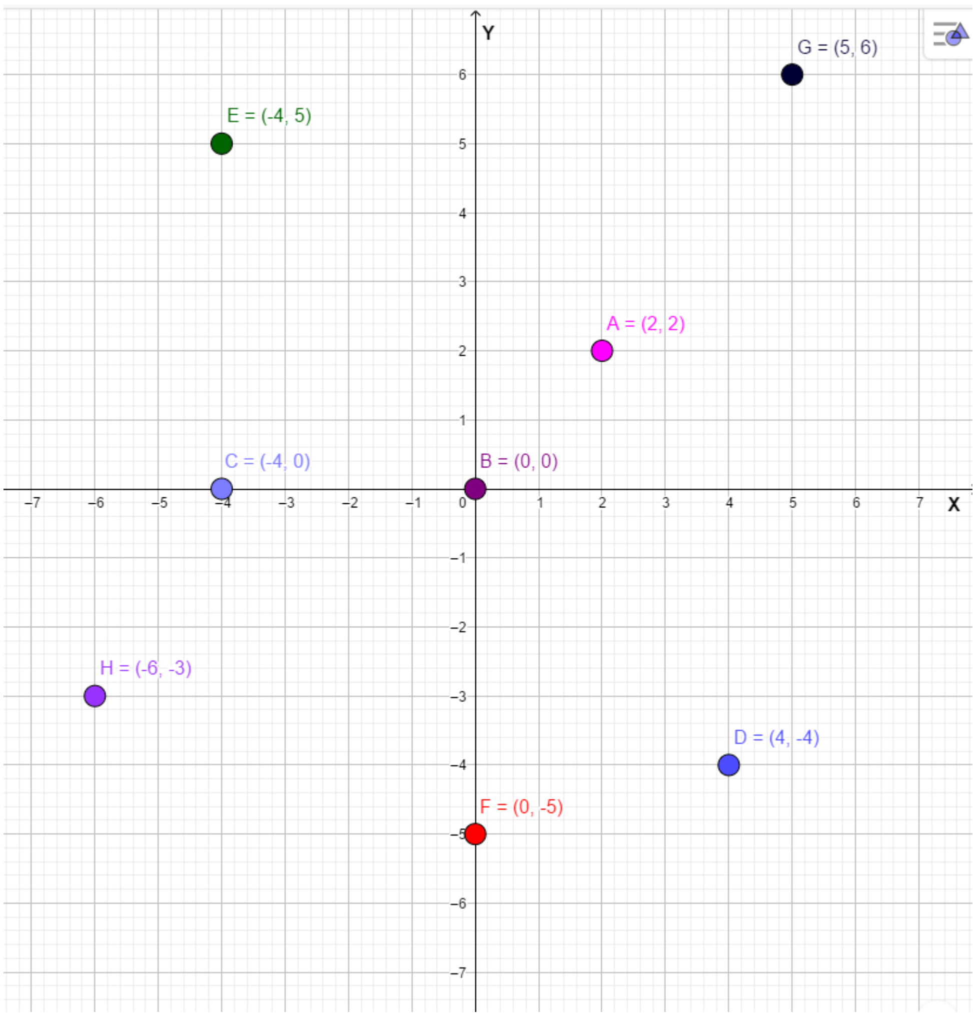
Los valores positivos del eje de las abscisas están a la derecha del origen y los valores negativos a la izquierda; mientras que los valores positivos de las ordenadas se encuentran arriba del origen y los negativos hacia abajo del origen. El plano se divide en cuatro cuadrantes, los cuales se ordenan en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj,



Localización de puntos en el plano

El saber localizar los puntos en un plano es fundamental para la geometría analítica, ya que de ello depende la correcta representación gráfica. A los puntos que se localizan en un plano son nombradas *coordenadas* y se escriben dos números dentro de unos paréntesis separados por una coma; el primer valor representa a las abscisas y el segundo a la ordenada (X, Y).

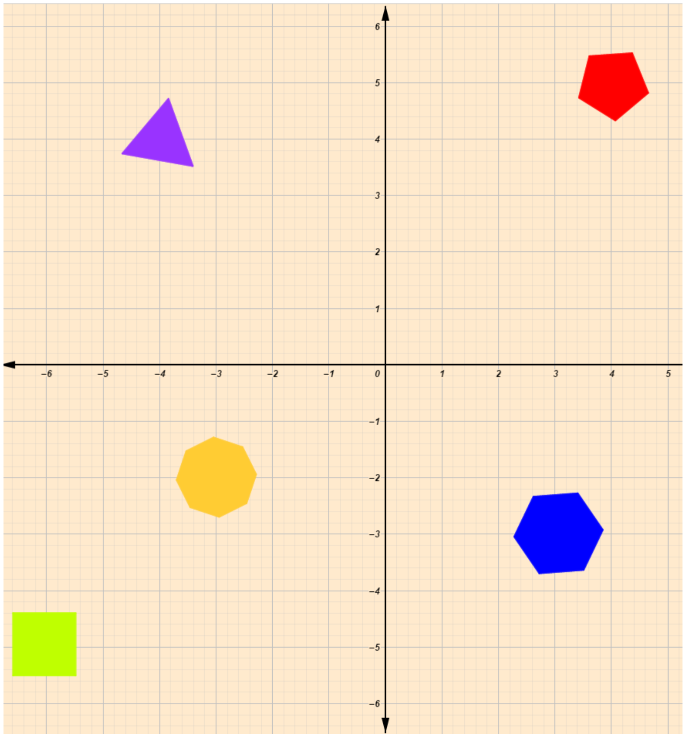
Ejemplo: Localiza las siguientes coordenadas en el plano cartesiano.



Coordenadas	(X, Y)
A	(2,2)
B	(0,0)
C	(-4,0)
D	(4,-4)
E	(-4,5)
F	(0,-5)
G	(5,6)
H	(-6,-3)

Practicando

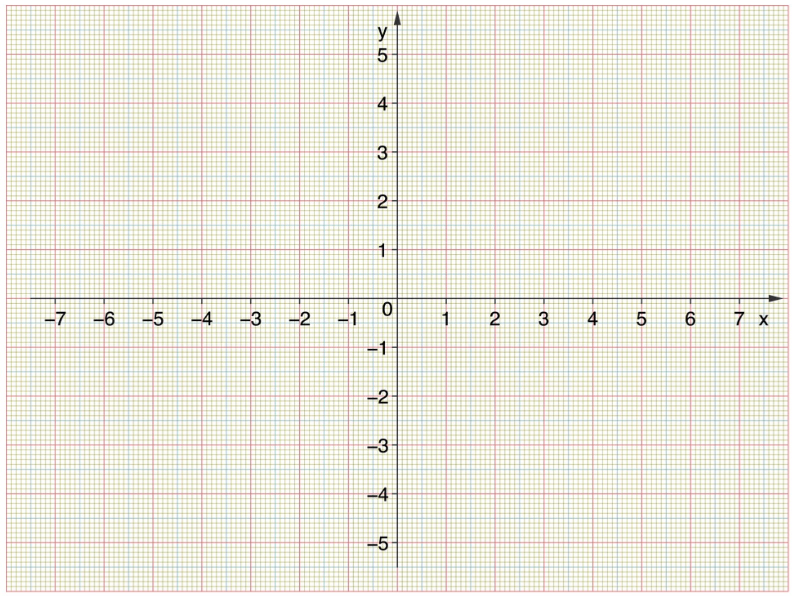
I. Analiza el siguiente plano cartesiano y responde a cada pregunta seleccionando la respuesta correcta



¿En qué cuadrante se ubica el triángulo?			
a) Cuadrante I	b) Cuadrante II	c) Cuadrante III	d) Cuadrante IV
¿Qué figura geométrica se encuentra en la coordenada (-3,-2)?			
a) Octágono	b) Cuadrado	c) Hexágono	d) Triángulo
¿Cuáles son las coordenadas del pentágono?			
a) (5,3)	b) (6,5)	c) (3,-3)	d) (4,5)
¿Qué figura geométrica se localiza en el cuadrante 4?			
a) Triángulo	b) Cuadrado	c) Hexágono	d) Octágono

II. Ubica las siguientes coordenadas en el plano.

Coordenadas	(X, Y)
A	(5,2)
B	(3,0)
C	(5,-3)
D	(0,0)
E	(4,-5)
F	(0,-1)
G	(-7,4)
H	(-6,-3)
I	(2,3)
J	(-3,-4)



Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de identificar los cuadrantes.		
Tengo la capacidad de diferenciar el sentido positivo y negativo en cada uno de los ejes.		
Reconozco el orden en el que nombran las coordenadas.		
Tengo la habilidad de identificar un punto ubicado en el plano cartesiano a través de coordenadas.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

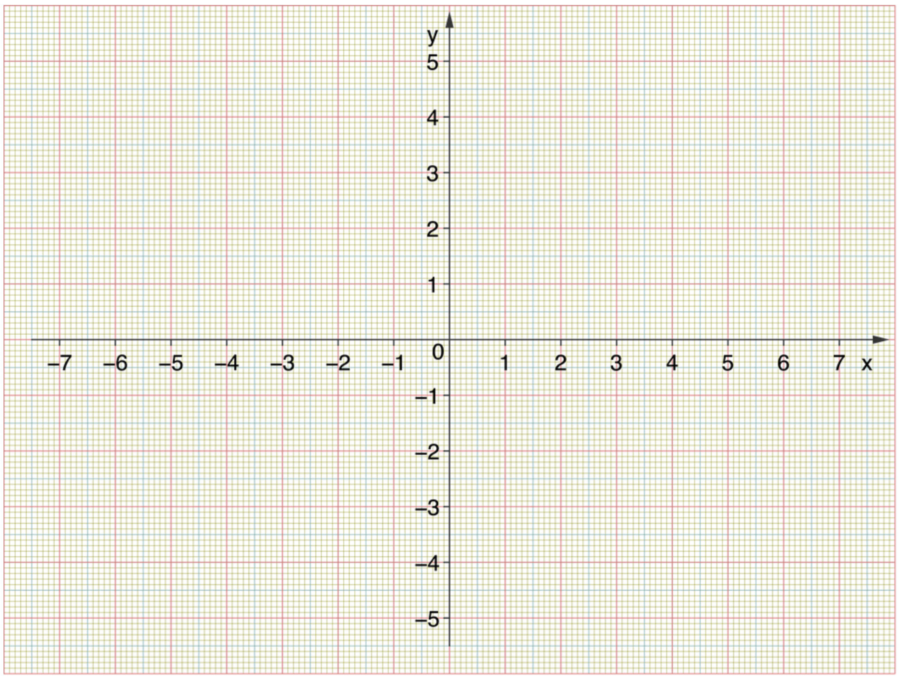
Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Daniel Carreón (2017). PLANO CARTESIANO súper fácil. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=kzOzYY-T-50
- Matemáticas Profes Alex (2018). Como ubicar puntos en el plano cartesiano con FRACCIONES Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=M-KzreZqXO0

Lección 2. Distancia entre dos puntos.

Explorando

1.- Ubica las siguientes coordenadas en el plano cartesiano, una vez ubicadas las coordenadas une los puntos en orden alfabético y para finalizar une el punto F con A.



Coordenadas (X, Y)	
A	**(-2,3)**
B	**(2,3)**
C	**(4,0)**
D	**(2,-3)**
E	**(-2,-3)**
F	**(-4,0)**

¿Qué figura se formó? ___________________________________

2.- Eleva a la potencia indicada los siguientes números.

$6^2 =$ $10^4 =$

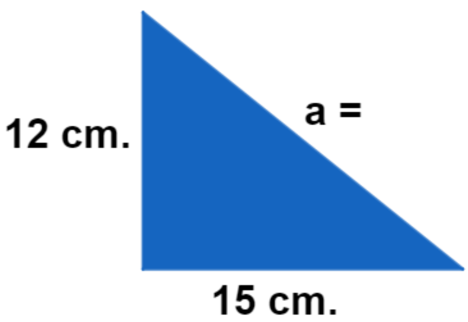
$8^3 =$ $2^3 =$

$5^0 =$ $5^2 =$

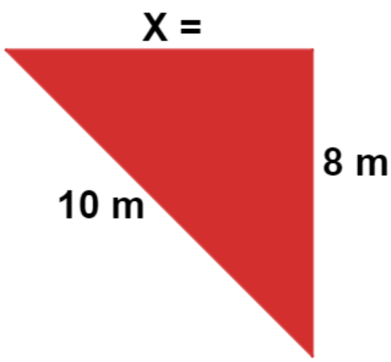
3.- Determina el valor del lado faltante de cada triángulo rectángulo basándote en el teorema de Pitágoras, el cual establece que "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos" ($c^2 = a^2 + b^2$).

Apoyo: recuerda que los catetos son los lados que forman el un ángulo de 90°, mientras que la hipotenusa es el lado opuesto a dicho ángulo. Si desconociéramos el valor de uno de los catetos se tendría que despejar para obtener el resultado, por ejemplo: $a^2 = c^2 - b^2$. Una vez realizada la potenciación y la suma/ resta se debe sacar la raíz cuadrada de ambos términos para obtener el resultado final.

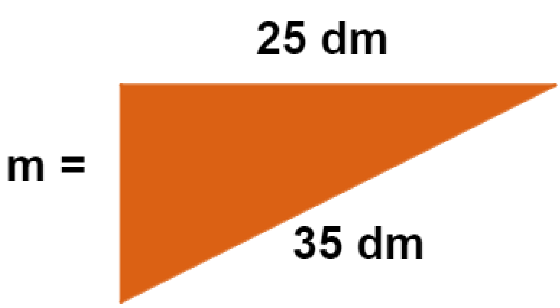
a) a=____



c) X= _____



d) m= _____



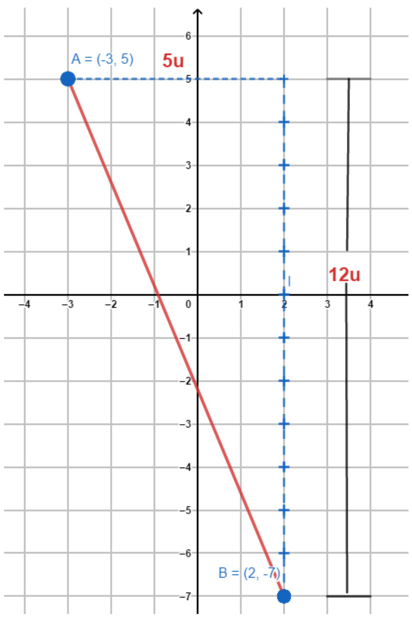
Comprendiendo

Distancia entre dos puntos

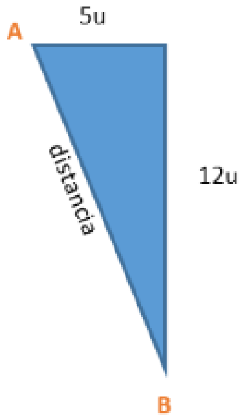
Para poder determinar la distancia o longitud que existen entre dos puntos se puede realizar de dos formas, la primera, aplicando el teorema de Pitágoras siempre y cuando elaboramos el grafico y la otra, por medio de la fórmula cuando solo usamos las coordenadas sin necesidad de graficar.

- Método gráfico

Ejemplo. Ubica las siguientes coordenadas en el plano cartesiano A (-3,5), B (2,-7) y determina la distancia del segmento AB.



Una vez localizados los puntos los unimos con una línea, ya que representa la distancia. Como se puede observar en el plano se forma un triángulo rectángulo, en el cual sabemos los valores de los catetos uno mide 12 unidades (12u) y el otro 5u.



Graficando los puntos y aplicando el **Teorema de Pitágoras** que señala que, el valor de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos. Determinamos la distancia.

$$d^2 = \sqrt{(12u)^2 + (5u)^2}$$

$$d^2 = \sqrt{144u^2 + 25u^2}$$

$$d^2 = \sqrt{169u^2}$$

$$d = 13u$$

Por lo tanto, podemos concluir que existe una distancia de 13u entre el punto A y B.

Pero... ¿Cómo puedes calcular la distancia que existe entre dos puntos, sin elaborar el grafico?

- Fórmula distancia entre dos puntos:

Si se conocen los puntos A (X_1 , Y_1) y B (X_2 , Y_2) y, se desea calcular las distancia que existe entre ellos, sin necesidad de ubicar las coordenadas en el plano cartesiano, se recurre a la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Ahora bien, una vez que se conoce la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, comprobemos calculando la distancia entre AB con los datos del ejemplo anterior.

Sabemos que las coordenadas son A (-3,5), B (2,-7)

Dónde: $X_1 = -3$, $Y_1 = 5$, $X_2 = 2$ y $Y_2 = -7$

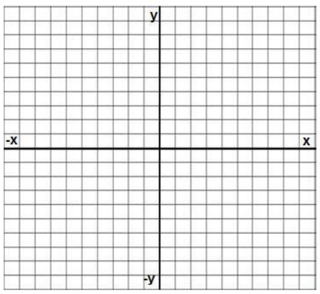
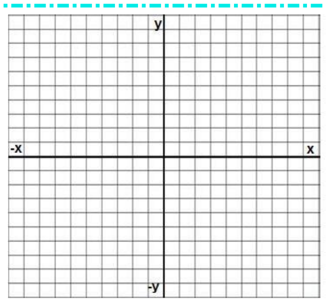
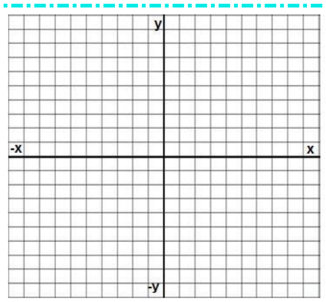
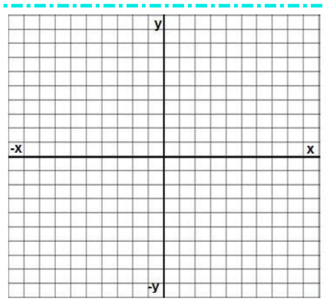
Sustituimos en la fórmula:

$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$
$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-7 - 5)^2}$$
$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(2 + 3)^2 + (-12)^2}$$
$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2}$$
$$d(\overline{AB}) = \sqrt{25 + 144}$$
$$d(\overline{AB}) = \sqrt{169}$$
$$d(\overline{AB}) = 13$$

Como te puedes dar cuenta nos da el mismo resultado.

Practicando

I. Localiza en cada plano cartesiano las coordenadas, después une ambos puntos con una línea y calcula la distancia utilizando el teorema de Pitágoras.

1.		A (4, -4), B (-3,3) **Operación:**
2.		**R (-1, 6), S (2,3)** Operación:
3.		**M (4, -3), N (0,0)** Operación:
4.		**X (1, 6), Y (7,-2)** Operación:

II. **Utiliza la fórmula de *distancia entre dos puntos* para determinarla en cada caso.**

1	A (-5,3), B (4,15) Procedimiento:	**4**	M (-2,1), N (7,-2) Procedimiento:
2	R (8,5), S (0,-1) Procedimiento:	**5**	X (-8,10), Y (0,4) Procedimiento:
3	D (-4,-2), E (0,0) Procedimiento:	**6**	A (5,0), B (-3,-3) Procedimiento:

III. **Apoyándote de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, calcula la distancia que existe entre AB, BC y CA una vez que tengas los valores determina si los vértices corresponden a un triángulo equilátero, isósceles o escaleno.**

A (-1,-3), B (7,1) y C (0,5)

$d\overline{AB} =$

$d\overline{BC} =$

$d\overline{CA} =$

Los vértices corresponden a un triángulo _________________.

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Comprendo el concepto de distancia entre dos puntos.		
Puedo graficar correctamente dos puntos en el plano, determinando el valor de lo que representarían los catetos de un triángulo.		
Puedo aplicar el teorema de Pitágoras para determinar el valor de la distancia entre dos puntos.		
Tengo la habilidad de determinar la distancia entre dos puntos a partir de la la fórmula de distancia entre dos puntos.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Julioprofe (2018). Distancia entre dos puntos del plano: Demostración y ejemplo. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=aaSrjfMyq1Y
- Khan Academy (s.f.). Distancia entre dos puntos [en línea]. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/pythagorean-theorem-distance/v/distance-formula

Lección 3. Coordenadas del punto medio de un segmento

Explorando

Responde cada uno de los planteamientos

1. El punto medio es aquel que divide un segmento en dos partes iguales.

   a) Verdad
   b) Falso

2. Traza una línea de 10 cm y divídela en dos partes iguales.

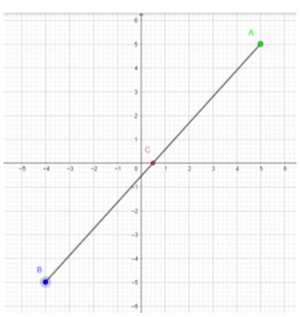
3. El punto medio de 16m es:

a) 8m

b) 9m

c) 10m

4. ¿Cuál de los puntos representa el punto medio?



a) C

b) A

c) B

Comprendiendo

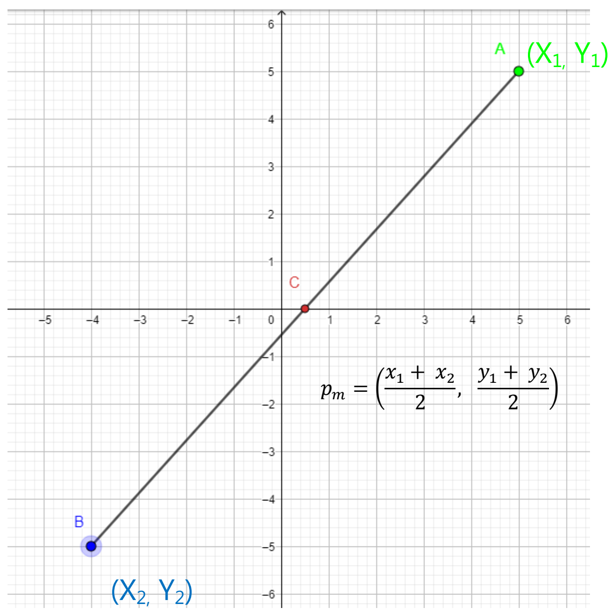
Punto medio

Encontrar el punto medio consiste en ubicar un punto que se encuentra a la misma distancia de P_1 y P_2.

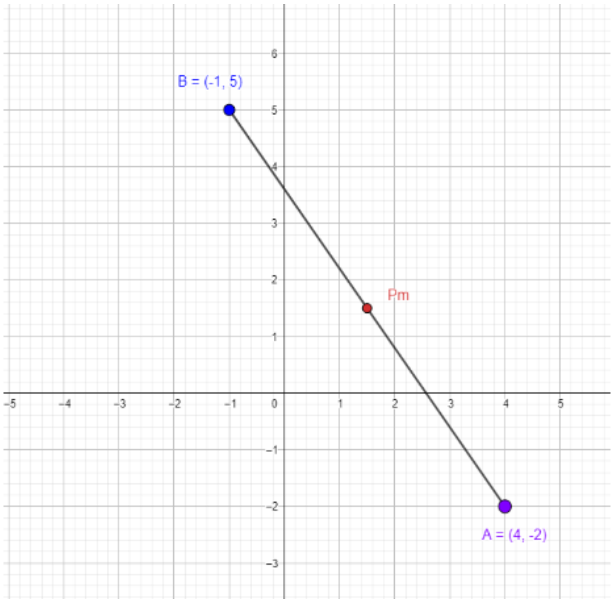
Dados dos puntos A (X_1, Y_1) y B (X_2, Y_2) en el plano cartesiano, se tienen que localizar las coordenadas de un punto medio, es decir, el punto que divide en dos partes iguales a nuestro segmento, o bien, el punto que se encuentra a la misma distancia de A y B.

Para determinar las coordenadas del punto medio se emplea la siguiente fórmula.

$$p_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Observa cómo se calculan las coordenadas del punto medio entre los puntos A (4,-2) y B(-1,5).



Donde:

$x_1=4$ $y_1=-2$

$x_2=-1$ $y_2=5$

Sustituimos en la fórmula:

$$p_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$p_m = \left(\frac{4 + (-1)}{2}, \frac{-2 + 5}{2}\right)$$

$$p_m = \left(\frac{4 - 1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$p_m = \left(\frac{4-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$p_m = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \textit{ igual se puede expresar como,}$$

$$p_m = (1.5\,, 1.5)$$

Por lo tanto, las coordenadas son para x= 1.5 y para y= 1.5.

Practicando

Determina el punto medio de las siguientes coordenadas:

1.	A (4, -4), B (-3,4) **Operación:**	**Coordenadas del punto medio** **X=** **Y=**
2.	**R (-1, 6), S (2,3)** Operación:	Coordenadas del punto medio X= Y=
3.	**M (4, -3), N (0,0)** Operación:	Coordenadas del punto medio X= Y=
4.	**X (1, 6), Y (7,-2)** Operación:	Coordenadas del punto medio X= Y=

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Comprendo el concepto de punto medio.		
Tengo la capacidad de identificar sustituir correctamente los valores de “x” y “y” en la fórmula de punto medio.		
Tengo la capacidad de identificar con la fórmula las coordenadas (x,y) del punto medio.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

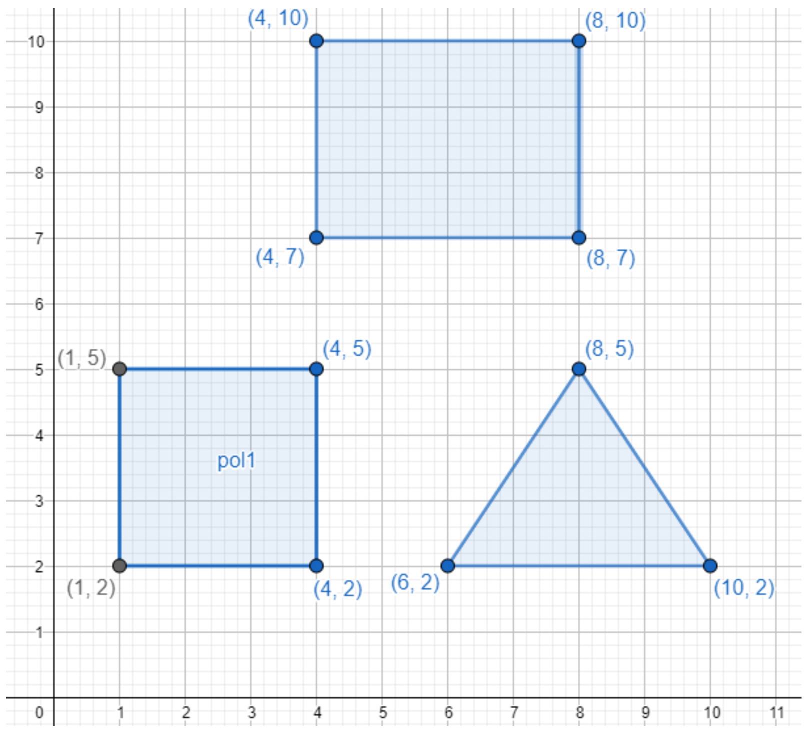
Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Espinoza J. (s.f.). Coordenadas del punto medio [En línea]. UAM. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/11_Coordenadas_del_punto_medio_html/index.html#

Lección 4. Cálculo de perímetro y área con uso de coordenadas de los vértices de un polígono.

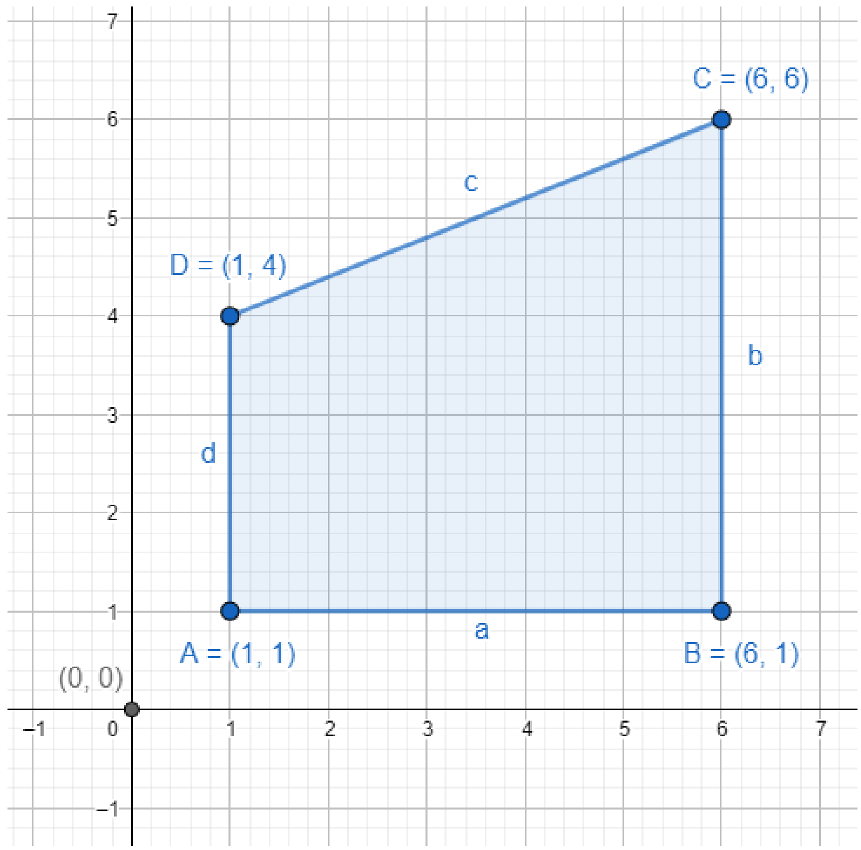
Explorando

Encuentra los perímetros y las áreas de las siguientes figuras:



Cuadrado	Triangulo	Rectángulo
Área:	Área:	Área:
Perímetro:	Perímetro:	Perímetro:

En un terreno que tiene ubicadas sus esquinas en las coordenadas (1,1), (6,1), (6,6) y (1,4) con respecto a un punto de referencia en (0,0).



1.- Calcula el perímetro del terreno.

2.- Calcula el área del terreno.

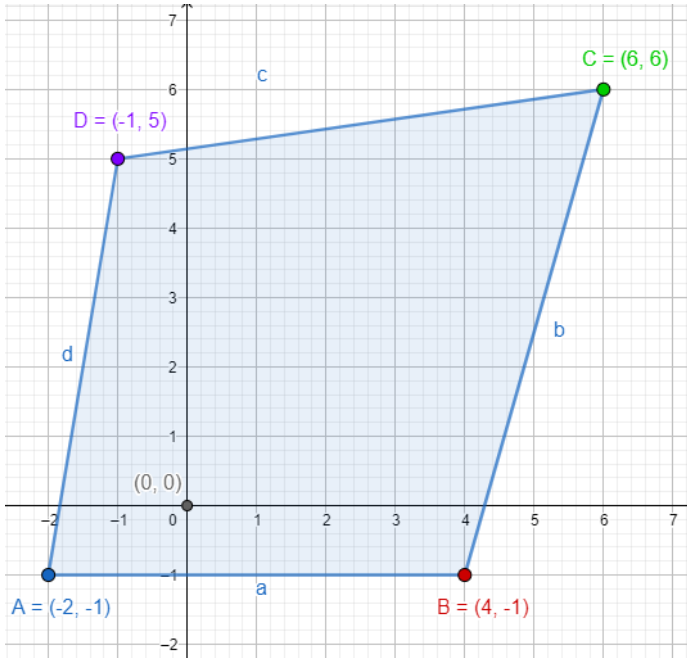
Comprendiendo

Perímetro de un polígono

Para obtener el perímetro de un polígono se suman las distancias de sus lados, para calcular el valor de los lados usaremos el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$ (Véase Lección 2 del presente cuadernillo)

Por poner un ejemplo calculemos el perímetro del polígono con vértices en (6,6), (-1,5), (-2,-1) y (4,-1).



Siendo "a" la distancia entre los vértices A y B, que será obtenida con el teorema de Pitágoras como se muestra a continuación:

	Vértices	
$a = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$	$A(X_A, Y_A)$	$B(X_B, Y_B)$
	(-2, -1)	(4, -1)

$$a = \sqrt{(4 - (-2))^2 + ((-1) - (-1))^2}$$ Sustituyendo

Distribución gratuita. Prohibida su venta

$a = \sqrt{(4+2)^2 + (-1+1)^2}$	Multiplicando los signos
$a = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$	"a" es igual a 6 unidades

Siendo "b" la distancia entre los vértices B y C, que será obtenida con el teorema de Pitágoras como se muestra a continuación:

	Vértices	
$b = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}$	$B(X_B, Y_B)$ (4, -1)	$C(X_C, Y_C)$ (6, 6)
$b = \sqrt{(6-(4))^2 + (6-(-1))^2}$	Sustituyendo	
$b = \sqrt{(6-4)^2 + (6+1)^2}$	Multiplicando los signos	
$b = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$	"b" es igual a $\sqrt{53}$ unidades	

Siendo "c" la distancia entre los vértices C y D, que será obtenida con el teorema de Pitágoras como se muestra a continuación:

	Vértices	
$c = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2}$	$C(X_C, Y_C)$ (6, 6)	$D(X_D, Y_D)$ (-1, 5)
$c = \sqrt{((-1)-(6))^2 + (5-(6))^2}$	Sustituyendo	
$c = \sqrt{(-1-6)^2 + (5-6)^2}$	Multiplicando los signos	
$c = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$	"c" es igual a $\sqrt{50}$ unidades	

Siendo "d" la distancia entre los vértices D y A, que será obtenida con el teorema de Pitágoras como se muestra a continuación:

	Vértices	
$d = \sqrt{(X_D - X_A)^2 + (Y_D - Y_A)^2}$	$D(X_D, Y_D)$ (-1, 5)	$A(X_A, Y_A)$ (-2, -1)
$d = \sqrt{((-1)-(-2))^2 + (5-(-1))^2}$	Sustituyendo	
$d = \sqrt{(-1+2)^2 + (5+1)^2}$	Multiplicando los signos	
$d = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$	"d" es igual a $\sqrt{37}$ unidades	

Por lo tanto, el perímetro será:

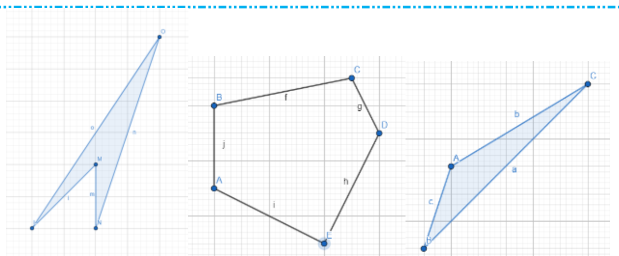
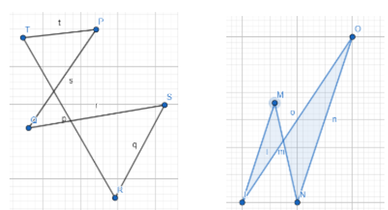
P = a + b + c + d.

$$P = 6 + \sqrt{53} + \sqrt{50} + \sqrt{37} = 26.434u$$

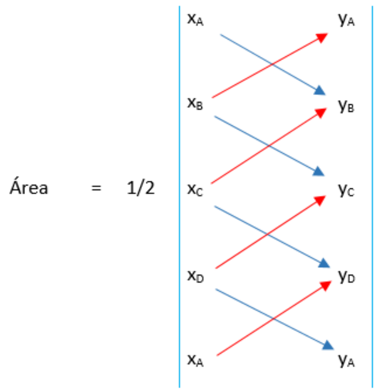
Se recomienda usar la calculadora sólo en el cálculo final, para minimizar el error y simplificar las operaciones.

Área de un polígono dadas las coordenadas de los vértices

El algoritmo utilizado para calcular el área de un polígono simple cuyos vértices están descritos como pares de coordenadas en un plano cartesiano, es conocido como “formula del área de Gauss”, la cual se aplica a polígonos simples de “n” vértices y mismo número de lados y no es aplicable a polígonos compuestos.

Ejemplos de polígonos simples	Ejemplos de polígonos compuestos
	

Para obtener el área por este método se organizan las coordenadas en una matriz, colocando un par seleccionado y siguiendo en *sentido contrario a las manecillas del reloj* para integrar el resto de los pares de coordenadas del polígono. Por último, se coloca el punto con el que se inició. Para el polígono de 4 lados {A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)} se organizaría de la siguiente manera:

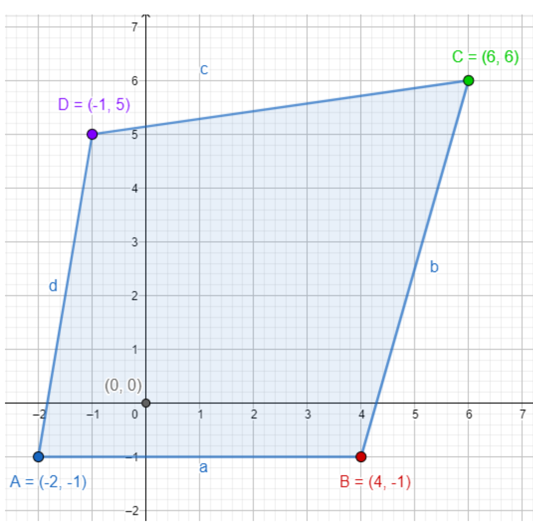


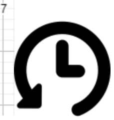
Sentido contrario a las manecillas del reloj

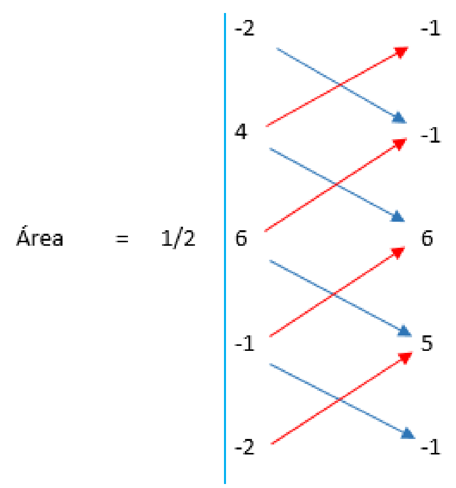
Una vez organizados los vértices tome la primera coordenada "*x*" y multiplíquela por la segunda coordenada "*y*", luego tome la segunda coordenada "*x*" y multiplíquela por la tercera coordenada "*y*", y repita hasta hacerlo para todos los vértices. Esto puede definirse mediante la siguiente fórmula.

$$Área = (½)[(X_A Y_B + X_B Y_C + X_C Y_D + X_D Y_A) - (X_A Y_D + X_D Y_C + X_C Y_B + X_B Y_A)]$$

Para ejemplificar se retoma el problema usado en el inicio de la sección "comprendiendo" donde las coordenadas de los vértices son A(-2,-1), B(4,-1), C(6,6) y D(-1,5).







Primero aplica una suma de productos como lo indican las flechas azules para después restarle la suma de los productos como lo indican las flechas rojas.

$$Área = (½)[((-2)(-1) + (4)(6) + (6)(5) + (-1)(-1)) - ((-2)(5) + (-1)(6) + (6)(-1) + (4)(-1))]$$

Hay que usar correctamente las leyes de los signos para la multiplicación (Véase cuadernillo de asesorías de algebra, lección 3).

$$Área = (½)[(2 + 24 + 30 + 1) - (-10 - 6 - 6 - 4)]$$

Se multiplican signos y se finaliza la suma.

$$Área = (½)[57 - (-26)] = (½)(57 + 26) = (½)83$$

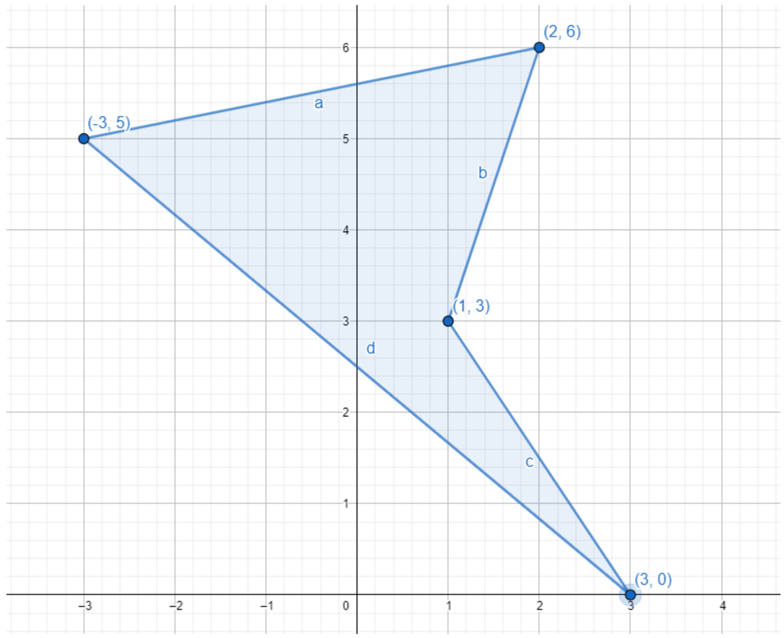
Por último, se divide el resultado entre 2.

$$Área = \frac{83}{2} = 41.5u^2$$

Resultando un área de 41.5 unidades cuadradas.

Practicando

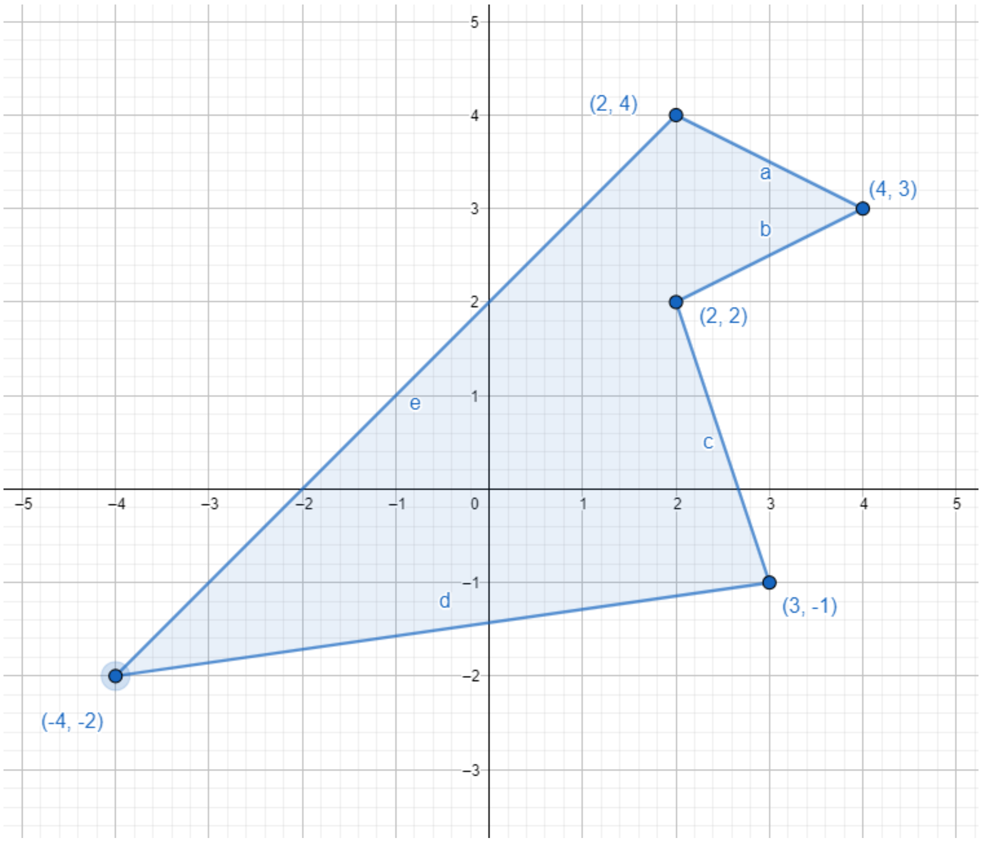
Calcula el perímetro y el área para los polígonos dados por las siguientes coordenadas:



Perímetro:

Área:

Área = $\begin{vmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{vmatrix}$ =



Perímetro:

Área:

Área = $\left| \quad \right|$ =

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Logro explicar que es el perímetro de un polígono.		
Comprendo cómo se realiza en cálculo del perímetro del polígono a partir de vértices.		
Puedo calcular el perímetro de polígonos simples.		
Logro calcular el área de polígonos simples de 3, 4 y 5 lados.		
Aplico las leyes de los signos para la multiplicación de manera satisfactoria.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Miguel Ángel GR (2019). Perímetro y área de figuras en el plano. Ejercicios resueltos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=0Qjs71owBGI
- Miguel Angel GR (2020). Perímetro y área de figuras en el plano. Ejemplo: 4 coordenadas. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=qWI0ZNWmAjk
- ElberG09 (2010). Obtención del área de polígono usando coordenadas de sus vértices. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=YmjtbOb6cac
- ElberG09 (2009). Área de un polígono usando sus vértices. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=HOyU-ytqUj0

Lección 5. Pendiente, ángulo de inclinación y graficar una recta

Explorando

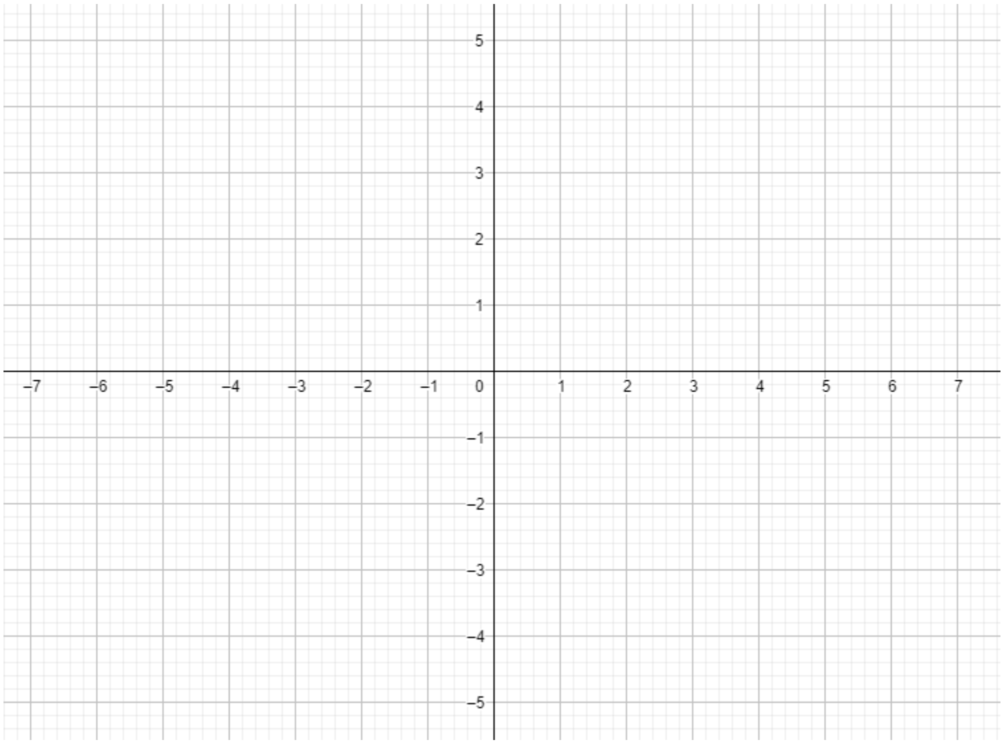
Responde las siguientes preguntas en el plano cartesiano.

1.- Ubica y marca los puntos A(-6, -3) y B(0, 3) en el plano cartesiano.

2.- Con una regla traza una recta que una los dos puntos.

3.- Traza un triángulo rectángulo que tenga como vértices los puntos A y B.

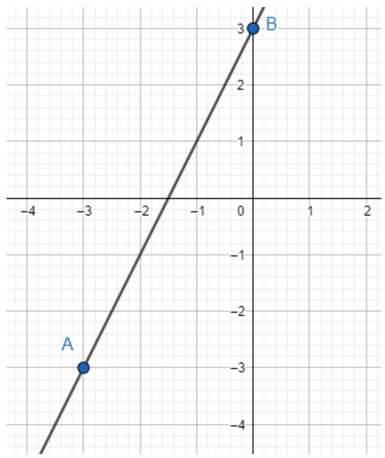
4.- Por último, escribe el valor de la longitud a cada cara del triángulo.

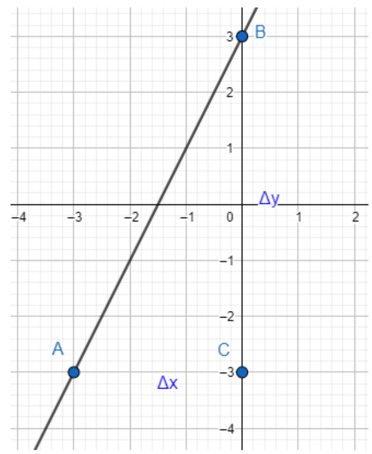


Comprendiendo

Pendiente, ángulo de inclinación y graficar una recta

Para graficar una recta es necesario conocer dos puntos que pasen sobre esa recta para trazar una línea que se extenderá de manera infinita, al menos imaginativamente como se observa a continuación en las siguientes figuras.





Para conocer la dirección y el sentido de la recta necesitaremos obtener la pendiente "m" que está definida como la diferencia en el eje "y" (Δy) dividido por la diferencia en el eje "x" (Δx) para dos puntos distintos en una recta. Por ejemplo, en la figura de la derecha al trazar el triángulo rectángulo que tiene como vértices los puntos A y B obtenemos a (Δy) y (Δx) en las caras vertical y horizontal del triángulo y al dividirlos nos dará la pendiente que se simboliza con la letra "m".

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

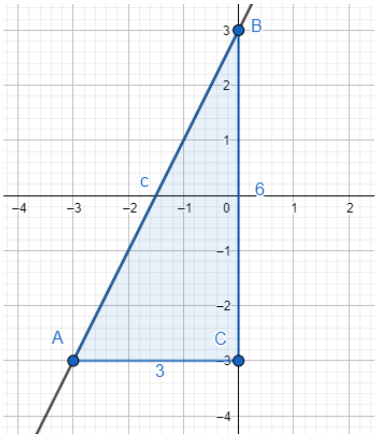
Además de la solución gráfica, también se puede obtener numéricamente al obtener las diferencias (A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2)) restando ordenadamente los valores de "y" y los de "x"

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para el ejemplo dado anteriormente en la sección "Explorando", la obtención de la pendiente "m" seria así:

Para A $(-3,-3)$ y B $(0,3)$ $\qquad m = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \frac{3-(-3)}{0-(-3)} = 2$

El signo positivo de la pendiente nos dice que la relación entre “x” y “y” será creciente, es decir, por cada valor que aumente “x”, “y” aumentará también como se aprecia en la siguiente figura. El número en el ejemplo que hemos tomado indica que por cada unidad que aumente “x”, “y” aumentará 2.

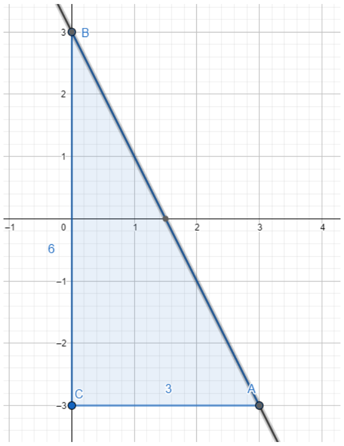


A(-3, -3) B(0, 3)

A (x_1, y_1) B (x_2, y_2))

$$m = \frac{-3-(-3)}{0-(3)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Solo en caso de que el signo de la pendiente fuese negativo (-m) se entendería que tendríamos una relación entre ”x” y “y” decreciente tal como se observa en la siguiente figura.



A(3, -3)
B(0, 3)

A (x_1, y_1) B (x_2, y_2))

$$m = \frac{3-(-3)}{0-(3)} = \frac{6}{-3} = -2$$

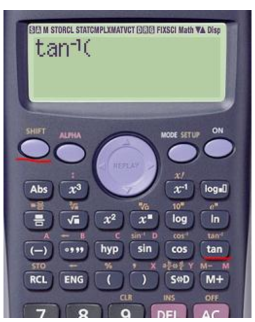
Por último, si ya tenemos la pendiente podremos obtener el ángulo (que se simboliza con "θ") de la recta con respecto al eje "x" con la siguiente relación trigonométrica:

$$m = \tan\theta$$

Al despejar el ángulo queda la función arco tangente de la pendiente o $\tan^{-1}$(m).

$$\theta = \arctan m$$

$m = \tan\theta$ Por lo tanto: $\theta = \arctan m$ $\theta = 64.434948^{o}$



(Shift + tan)

Figura a

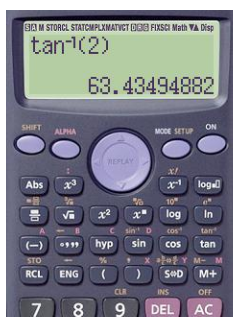


Figura b

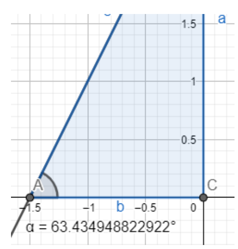
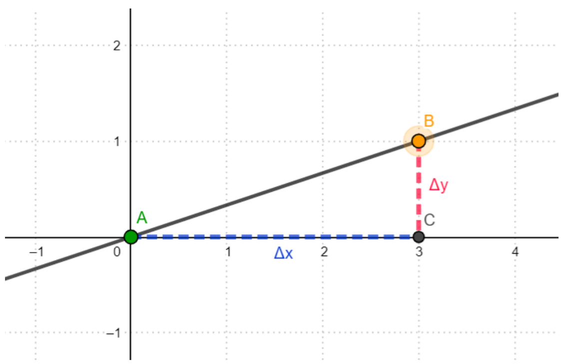


Figura c

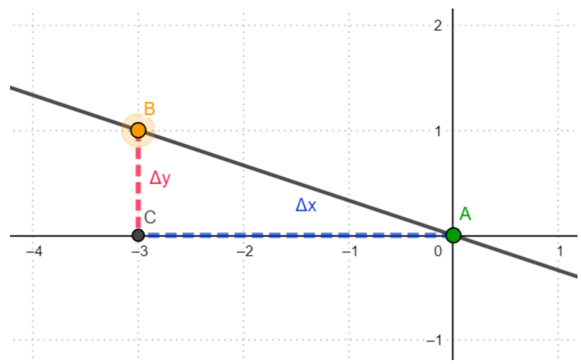
Las figuras a y b se muestran la manera para ingresar la ecuación para obtener el ángulo. Para poner arco tangente en la calculadora debemos presionar la tecla shift junto con la tecla tan, luego ingresar el valor de la pendiente y cerrar el paréntesis, por último, le solicitaremos el resultado con la tecla =. En la figura c se indica el valor obtenido del ángulo

Además, los valores que puede tomar la pendiente son mayor que 0 hasta infinito o menor que 0 hasta menos infinito. Los valores de pendiente mayores que 0 y menores que 1 ($0<m$ y $m<1$) tienen un ángulo menor a 45° ($\theta < 45°$), mientras que para una pendiente mayor o igual que uno ($1 \leq m$) se tienen ángulos mayores a 45° sin llegar a los 90° ($45° \leq \theta < 90°$), funcionando de manera simétrica para los valores negativos de pendiente.

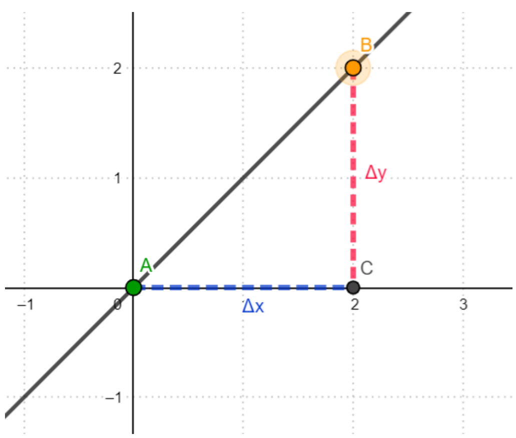
m=1/3 es decir menor que uno



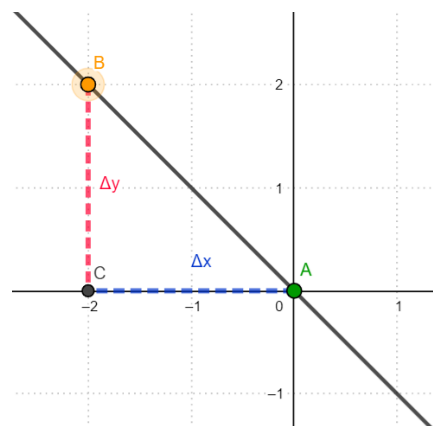
m=-1/3 es decir menor que uno



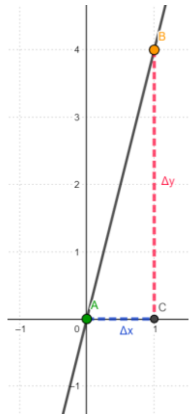
m=1



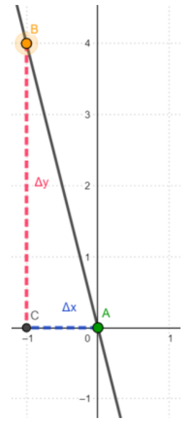
m=-1



m = 4 es decir mayor que uno



m = -4 es decir menor que -1

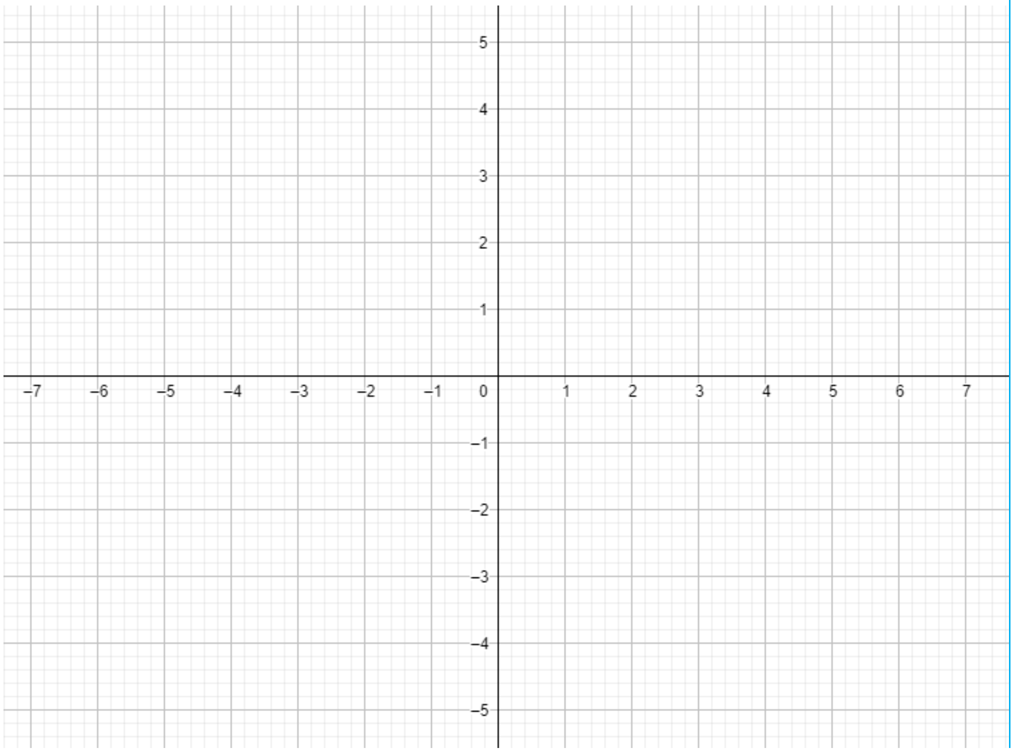


Imágenes obtenidas de: *Calculadora gráfica*. Geogebra. https://www.geogebra.org/calculator

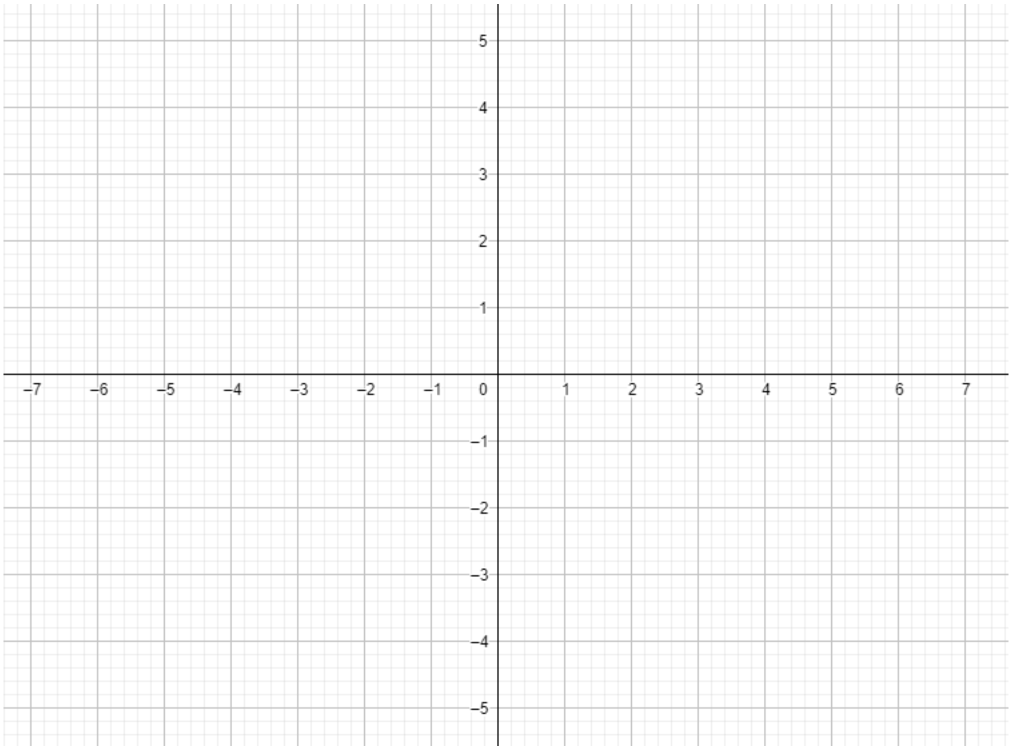
Practicando

Gráfica las rectas en los espacios correspondientes según las siguientes coordenadas, para después obtener la pendiente y el ángulo con respecto al eje X.

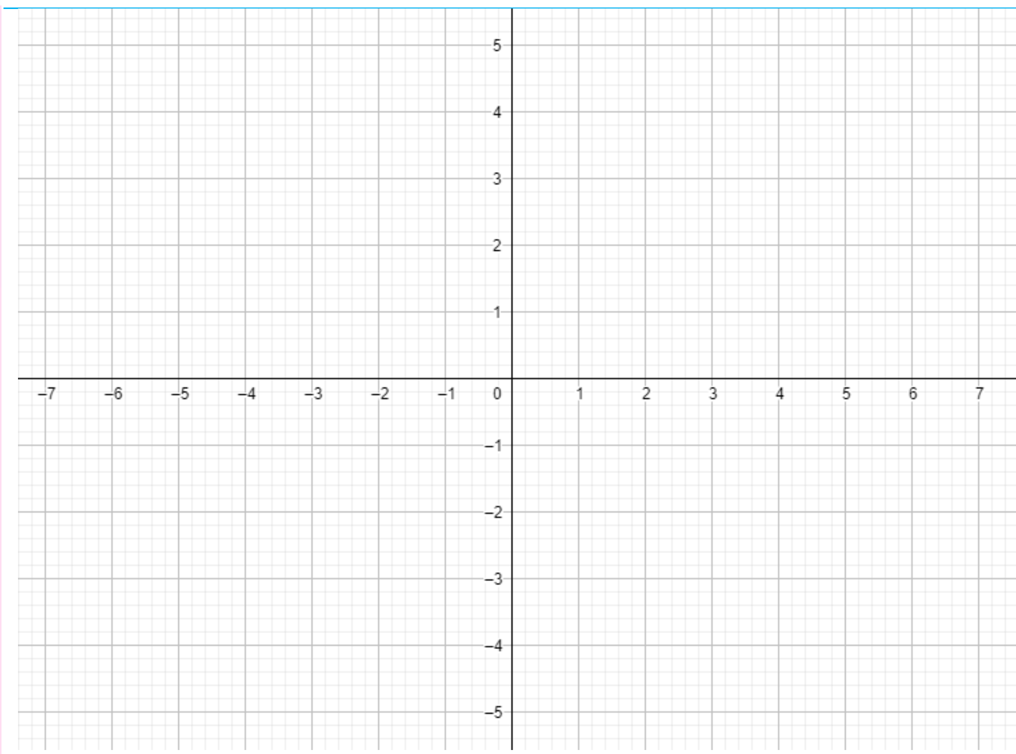
Coordenadas	Pendiente (con signo)	Ángulo
	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\theta = \arctan m$
(-1,1) y (1,3)		
(-1, 2) y (3/2, 0)		
(-3/2, 1/2) y (5/2, -3/2)		



Procedimiento



Procedimiento



Procedimiento

Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Logro graficar una recta dados dos puntos.		
Puedo construir un triángulo rectángulo.		
Soy capaz de calcular la pendiente de manera grafica $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$		
Logro calcular la pendiente de manera numérica. $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$		
Identifico el sentido de la pendiente a partir de la gráfica y/o la tabla (creciente o decreciente).		
Obtengo el ángulo de la recta con respecto al eje "x".		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

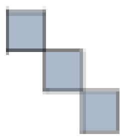
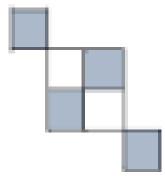
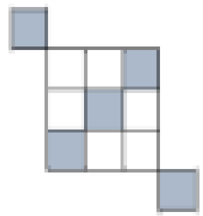
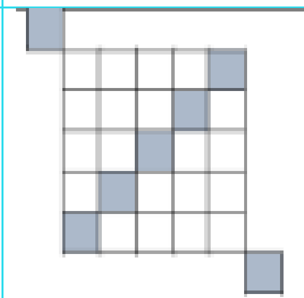
Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Matemáticas Profe Alex (2016). Pendiente de la recta o inclinación de la recta. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=mi1a3OUQP64
- Wikipedia (s.f). Pendiente (matemáticas)[en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Pendiente_(matem%C3%A1ticas)
- Geogebra. (s.f.). Simulador de rectas [en línea]. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/gqdsa6xt

Lección 6. Ecuaciones de rectas

Explorando

I.- Observa la siguiente figura y responde lo que se te pide

x	1	2	3	5
y				

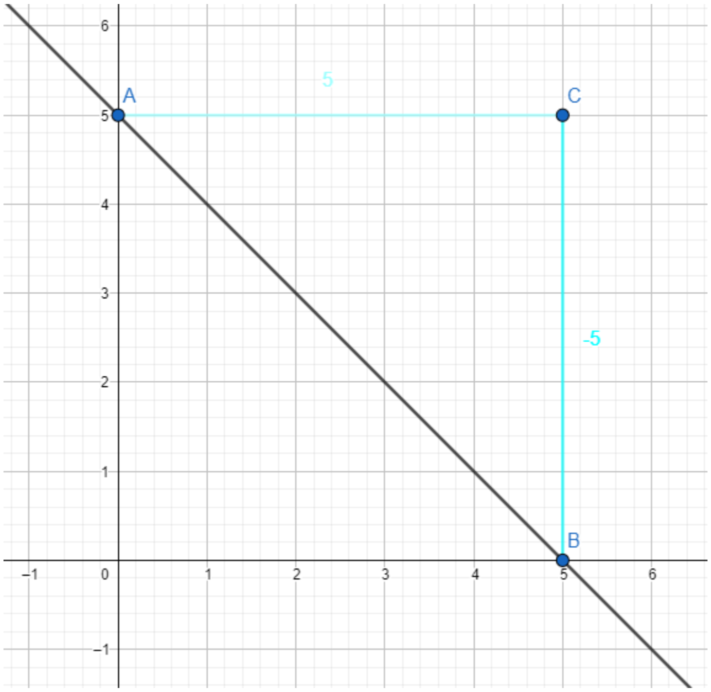
a) Completa la tabla según lo que ves en la imagen.

x	y
	3
2	
3	5
4	
5	7
10	

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente?

c) ¿Cuánto vale “y” cuando “x” vale cero (x = 0)?

II.- Analiza el grafico y contesta lo que se te pide.



a) Completa la tabla según lo que ves en la imagen.

x	y
-5	
	5
5	
10	-5

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente?

b) ¿Cuánto vale "y" cuando "x" vale cero (x = 0)?

Comprendiendo

Maneras de obtener la ecuación de una recta

En geometría la recta o la línea recta se extiende en una misma dirección, existe en una sola dimensión y contiene infinitos puntos; está compuesta de infinitos segmentos (el fragmento de línea más corto que une dos puntos). También se describe como la sucesión continua e indefinida de puntos en una sola dimensión, es decir, no posee principio ni fin (Luyo Sánchez J.L. s/f).

Características de la recta

- La recta se prolonga indefinidamente en ambos sentidos.
- En geometría euclidiana, la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.
- La recta puede definirse como el conjunto de puntos situados a lo largo de la intersección de dos planos.

Dos cantidades se pueden relacionar por medio de una ecuación que contiene dos variables. En esta lección examinaremos cómo representar algebraicamente una de esas relaciones mediante una gráfica en un plano coordenado. La gráfica y la tabla numérica pueden entonces usarse para descubrir propiedades de las cantidades que no son evidentes a partir sólo de la ecuación

La ecuación de la recta se puede obtener:

- **Dados 2 puntos [*A* (x_A, y_A) *y B* (x_B, y_B)*]*.**
- **Un punto y la pendiente [*A* (x_A, y_A) *y m*].**
- **La pendiente y la intersección de la recta con el eje "y" [m y b].**

La pendiente y la intersección de la recta con el eje "y" [m y b]

En geometría analítica las líneas rectas en un plano pueden ser expresadas mediante una ecuación del tipo y = m x + b, donde "x", "y" son variables en un plano cartesiano. En dicha expresión m es denominada la "pendiente de la recta" y está relacionada con la inclinación que toma la recta respecto a un par de ejes que definen el plano, mientras que b es el denominado "término independiente" u "ordenada al origen" y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano.

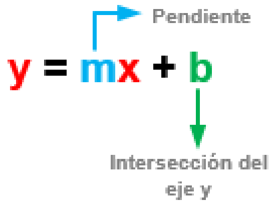


Imagen tomada de: https://miprofe.com/ecuacion-de-la-recta-en-su-forma-pendiente-interseccion/

Como se vio en la lección anterior "m" es la pendiente de la recta y se obtiene conociendo dos puntos que pasen por la recta (A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2)).

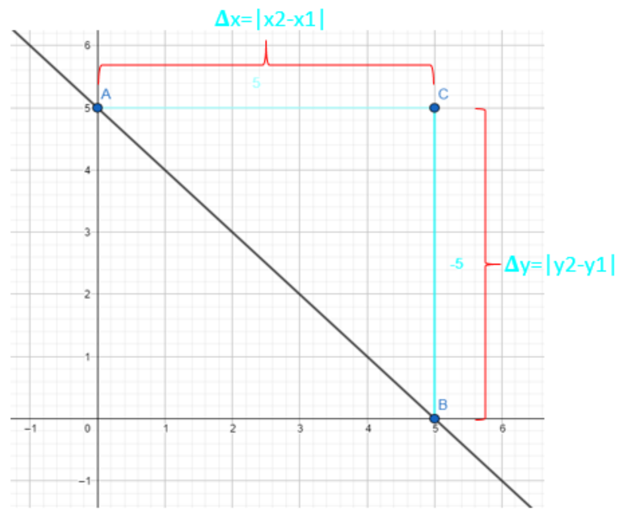
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ver lección 5 del presente cuadernillo

Para obtener el valor de "b" solo debemos encontrar el valor de "y" cuando "x" vale cero (x=0), siendo y=b en este caso.

@ x=0 $y = m(0) + b$	Consideramos analizar la ecuación cuanto x es igual a 0 sustituyendo su valor.
$y = \cancel{m(0)} + b$	Al multiplicar la pendiente por 0 se elimina el término.
$y = b$ para x=0	Resultando que para x=0, y=b.

Pongamos el ejemplo del problema II de la sección "Explorando":



Diferencias en x	x	y	Diferencias en y
	-5	10	
5	0	5	-5
5	5	0	-5
5	10	-5	-5

Las coordenadas que ustedes pusieron en la tabla fueron (-5, 10), (0, 5), (5,0) y (10, -5) que representan puntos de la recta. Tomaremos dos puntos de la tabla, por ejemplo (5,0) y (10, -5).

$m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	(x_1 , y_1) (x_2 , y_2) (5 , 0) (10 , -5)

$$m=\frac{0-(-5)}{5-(10)}=\frac{5}{-5}=-1$$

Según la tabla: para x=0 tendríamos y=5

Por lo tanto, b=5

Teniendo como ecuación para el problema:

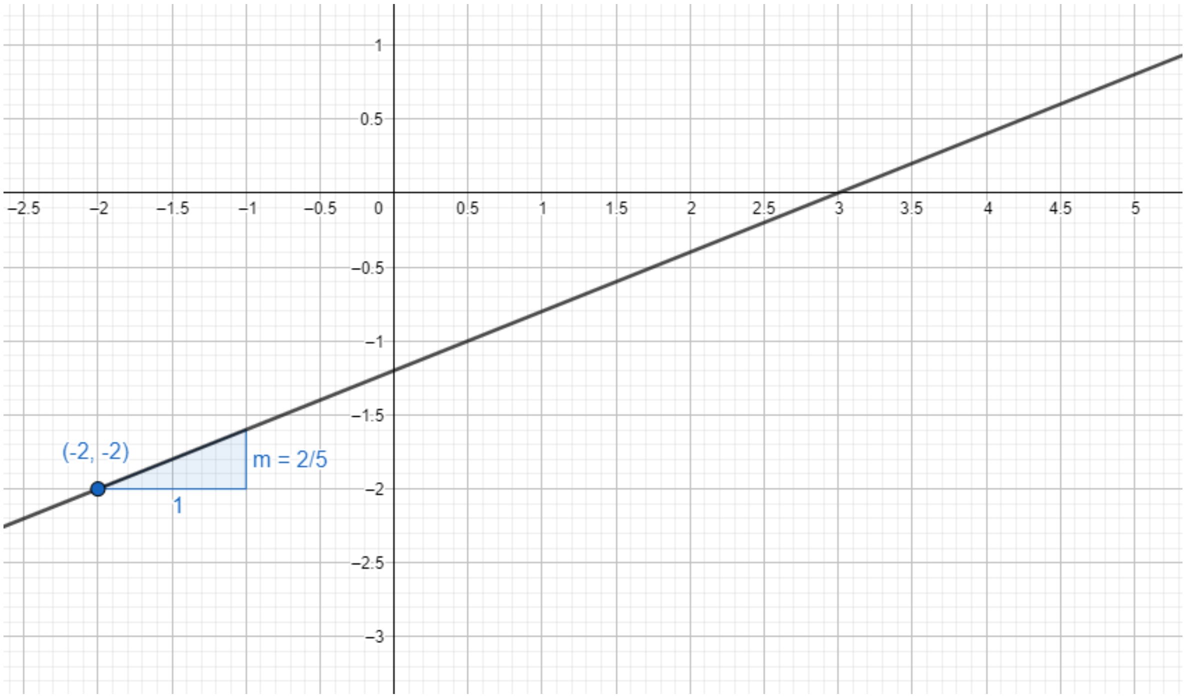
y=	(m=-1)x	+(b=5)
y =	**-x**	**+ 5**

Un punto y la pendiente [*A* (x_A, y_A) *y m*].

También se puede expresar a partir de un punto A (x_A, y_A) y la pendiente "m" de la recta siendo del tipo:

$$(y-y_A)=m(x-x_A)$$

Si tuviéramos la pendiente y un punto que pase por la recta:



m = (2/5) y A (-2,-2), Substituyendo en la ecuación **"Punto pendiente"** de la recta:

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A}) = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A})$$

Aplicando leyes de los signos:

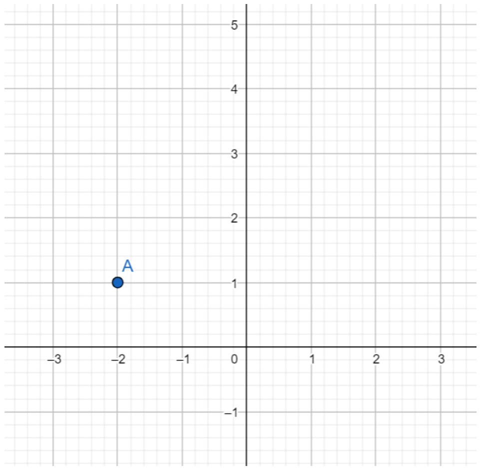
$$(y - (-2)) = \frac{2}{5}(x - (-2))$$

De manera que esta ecuación queda:

$$\boxed{y + 2 = \frac{2}{5}(x + 2)}$$

Veamos otro ejemplo; en el caso de la ecuación punto pendiente $y - 1 = \frac{6}{3}(x + 2)$ se entiende que la pendiente es 2 $(m = \frac{6}{3} = 2\ )$ y es posible observar el signo positivo a diferencia de la ecuación punto pendiente $(y - y_A) = m(x - x_A)$, lo cual representa una multiplicación de signos iguales $y - 1 = \frac{6}{3}(x - (-2))$ [Al multiplicar (-)(-) resulta (+)] por lo tanto el punto se puede deducir como A(-2, 1).

De manera que



m=2

x	y
-2	1
-1	3
0	5
1	7

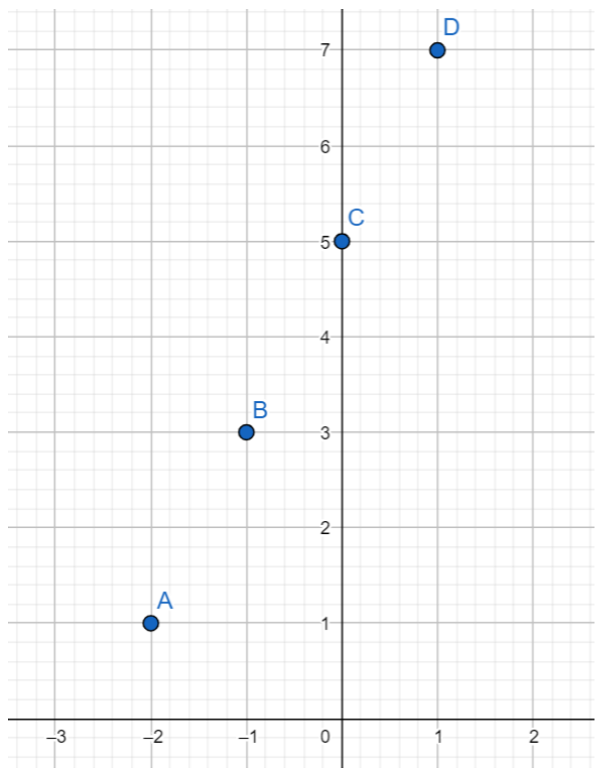
Dada la pendiente podremos saber que cada vez que "x" aumente uno "y" aumentará 2, por lo tanto, si "x" aumenta 3 "y" aumentara 6.

Al respetar la pendiente, los puntos obtenidos en la tabla se ajustarán a la recta $y - 1 = \frac{6}{3}(x + 2)$ de manera que será la misma ecuación que:

$y - 3 = 2(x + 1)$ B (-1, 3),

$y - 5 = 2(x - 0)$ C (0, 5) y que

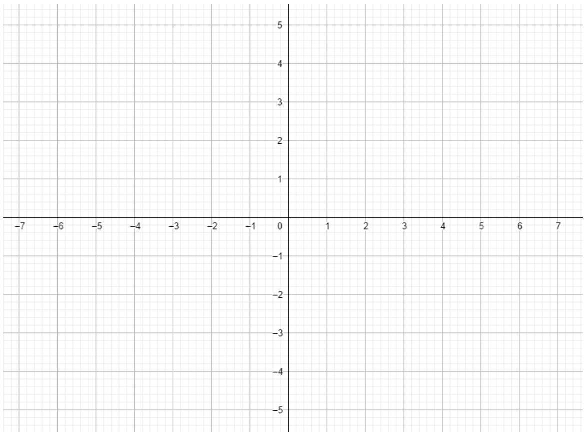
$y - 7 = 2(x - 1)$ D (1, 7)

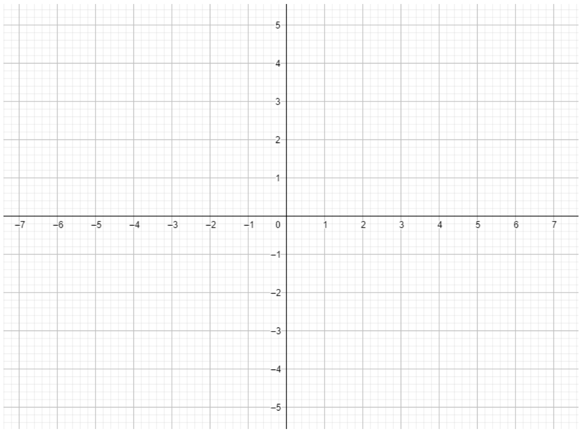


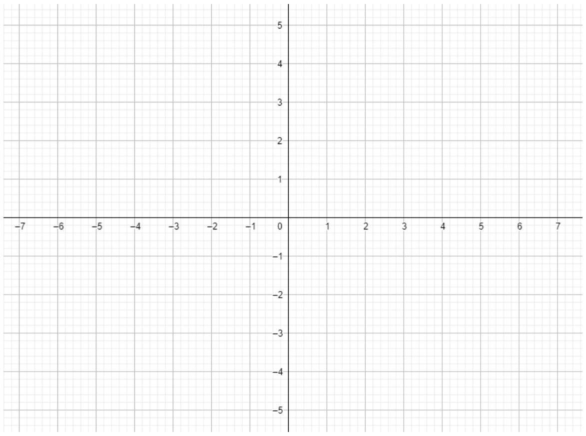
Practicando

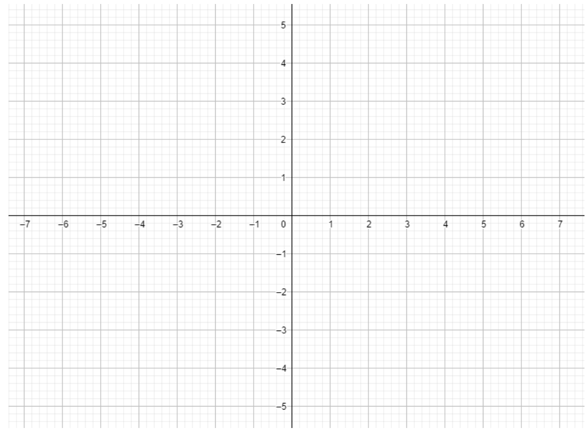
I.- Grafica en los planos de abajo las siguientes ecuaciones:

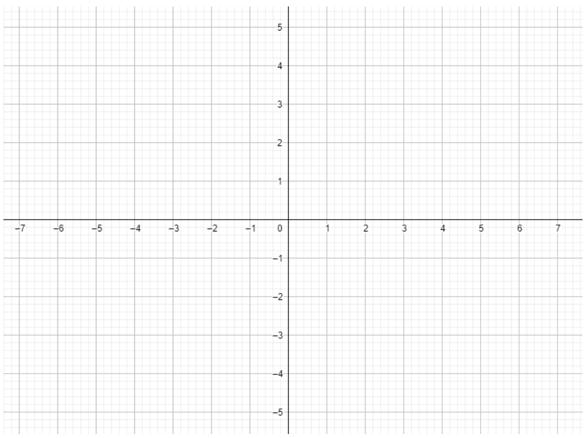
	$y - y_1 = m\,(x - x_1)$		$y = mx + b$
1.-	$y + 9 = \frac{8}{4}(x + 4)$	4.-	$y = -\frac{3}{2}x - 3$
2.-	$y - (-5) = \frac{1}{6}(x + 8)$	5.-	$y = \frac{1}{6}x - 5$
3.-	$y = -\frac{3}{5}(x + 9)$	6.-	$y = \frac{7}{4}x - 9$

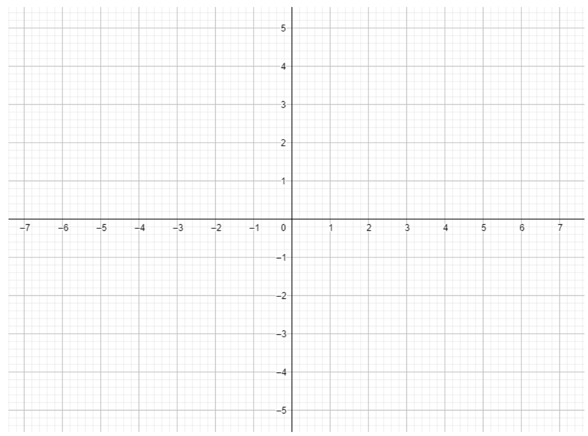












II.- Describe la ecuación de la recta que pasa por dos puntos en las formas pendiente e intersección con el eje "y" y punto pendiente:

Recuerda obtener primero la pendiente para cada par de coordenadas.

$y = mx + b$ $\qquad$ $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

A(1, 2) y B(-2,5)

x y

m=

A(0, 2) y B(3, 1)

x	y

m=

Ayudate del simulador en linea (se puede acceder desde celular o PC):
https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-lines/latest/graphing-lines_es.html

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Puedo explicar que es una recta y sus características.		
Comprendo la ecuación de la recta en su forma pendiente-intersección.		
Soy capaz de calcular la pendiente.		
Logro generar tablas de datos a partir de un gráfico.		
Genero tablas de datos partir de una ecuación.		
Soy capaz de generar gráficos a partir de una ecuación.		
Identifico cuando una ecuación es creciente o decreciente.		
Despejo para transformar las ecuaciones		
¿Sobre qué temas requiero más Asesorías Académicas?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Graficando rectas (s.f.). Pendiente [en línea]. Realizar el "Juego de Rectas" hasta el nivel que llegues en el simulador. Disponible en: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-lines/latest/graphing-lines_es.html

Lección 7. Rectas paralelas, perpendiculares u oblicuas

Explorando

Identifica el color de las rectas paralelas, el color de las rectas perpendiculares y el color de las rectas oblicuas en la siguiente figura.

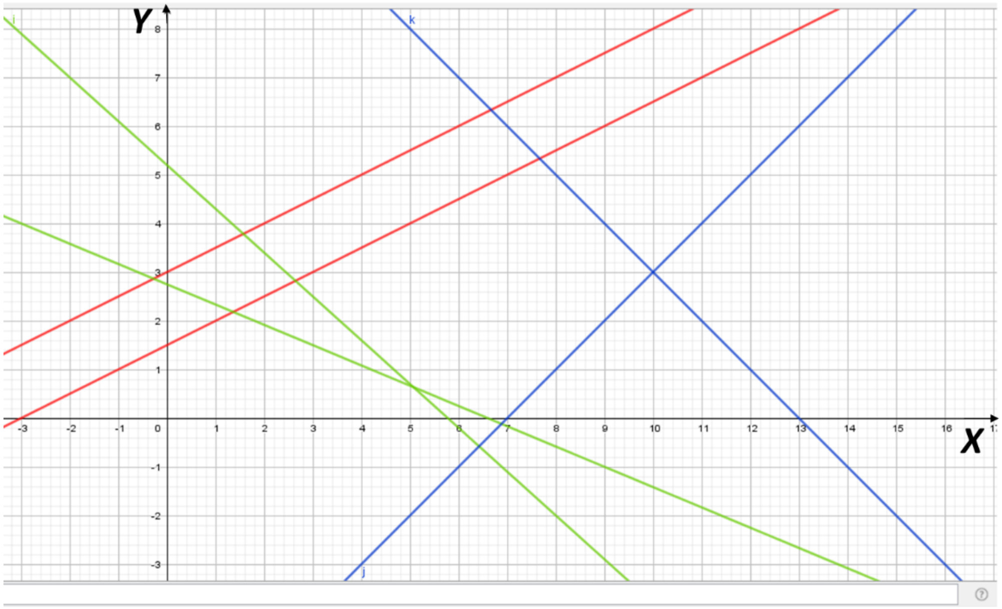


Figura 7.1

Las rectas paralelas son de color____

Las rectas perpendiculares son de color____

Las rectas oblicuas con de color____

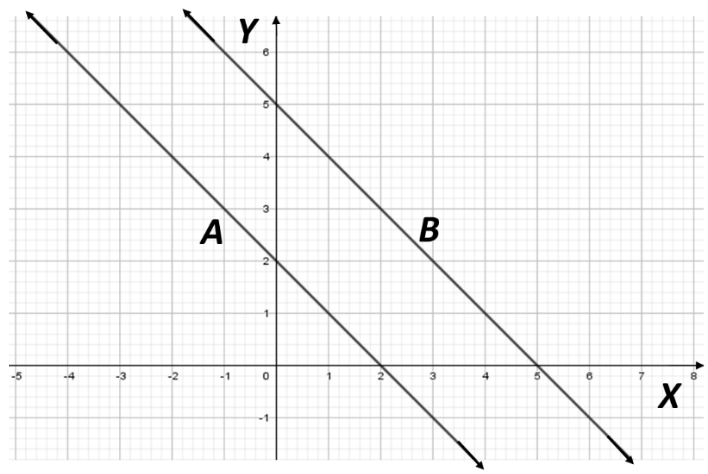
Comprendiendo

Rectas paralelas, perpendiculares u oblicuas

Rectas paralelas

Son dos o más rectas que en el plano nunca se cortan, no se tocan, no tienen puntos en común.

Ejemplo:



En la figura anterior se observa que la recta A tiene la misma inclinación que la recta B, por lo tanto, al prolongarse nunca tendrán un punto en común.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Si la recta A tiene como pendiente m_1 y la recta B tiene como pendiente m_2 entonces las rectas A y B serán paralelas si se cumple que sus pendientes sean iguales:

$$\boldsymbol{m_1 = m_2}$$

Ejemplo. La recta A tiene como ecuación $2x - y + 2 = 0$ y la ecuación de la recta B es $4x - 2y - 8 = 0$. Determina si la recta A y la recta B son paralelas.

Observamos que las ecuaciones de las rectas A y B, están expresadas en su forma general $Ax + By + C = 0$ por lo que podemos deducir sus pendientes con la relación $m = -\frac{A}{B}$ de la siguiente manera:

Ecuación general de la Recta A: $Ax + By + C = 0$

Pendiente de la Recta A: $m = -\frac{A}{B}$

Recta A

$A = 2$

B= -1

Recta 1 $\longrightarrow$ ***A*** $\longrightarrow$ $2x - y + 2 = 0 \longrightarrow m = -\frac{2}{(-1)} = 2$

Recta 2 $\longrightarrow$ ***B*** $\longrightarrow$ $4x - 2y - 8 = 0 \longrightarrow m = -\frac{4}{(-2)} = 2$

$A = 4$

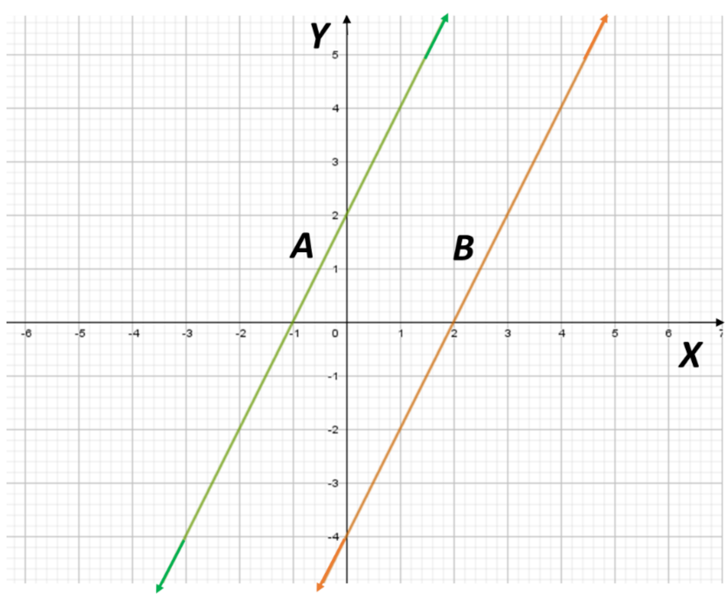
$B = -2$

Recta B

$Ax + By + C = 0$

Ecuación general de la Recta B

Como la pendiente de la recta A es $m = 2$ y la pendiente de la recta B es $m = 2$, entonces concluimos que las rectas son paralelas y las representamos en el siguiente gráfico.



Ejemplo. ¿Cuál es la recta paralela a $x + 2y - 4 = 0$ que pasa por el punto $P(4,1)$?

En la ecuación general de la recta se identifican los valores de A y B, resultando:

$$\underset{A}{x} + \underset{B}{2}y - 4 = 0$$

Resultando $A = 1$ y $B = 2$

Enseguida se sustituyen los valores de $A = 1$ y $B = 2$ en la relación de pendiente

$$m = -\frac{A}{B}$$

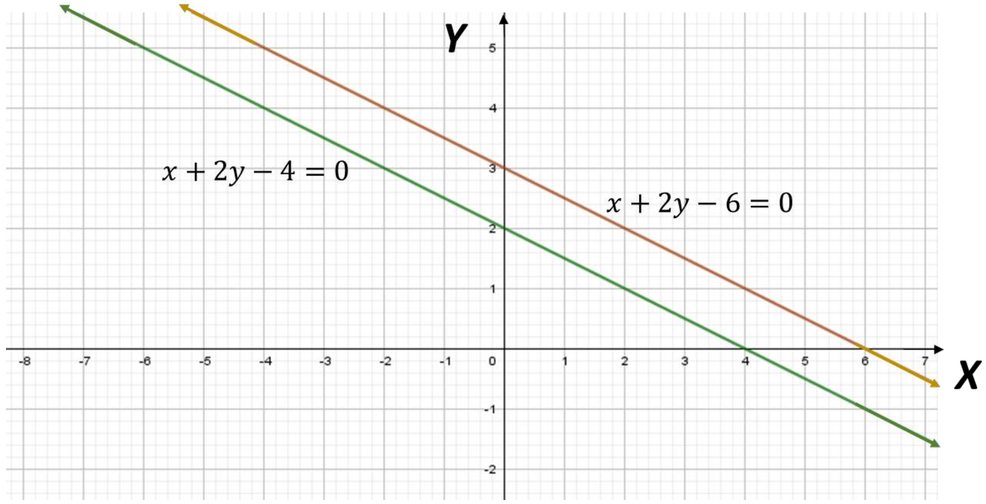
$m = -\frac{1}{2}$ que es la pendiente de la recta.

Como sabemos que la recta $x + 2y - 4 = 0$ tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y queremos buscar otra recta que tenga la misma pendiente y que pase por el punto $P(4,1)$ entonces en la ecuación de la recta punto pendiente, sustituimos los valores de la pendiente y las coordenadas del punto.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	Ecuación de la recta punto pendiente
$m = -\frac{1}{2}$ y $P(4,1)$	Pendiente y punto por donde va a pasar la recta paralela.
$y - 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 4)$	Sustituyendo valores
$2(y - 1) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x - 4)$	Multiplicando por 2 ambos miembros.
$2y - 2 = -1(x - 4)$	Simplificando
$2y - 2 = -x + 4$	Resolviendo el producto en el segundo miembro
$x + 2y - 2 - 4 = 0$	Igualando a cero
$x + 2y - 6 = 0$	Ecuación de la recta

Concluimos que la recta $x + 2y - 6 = 0$ que pasa por el punto $P(4,1)$ es paralela a la recta

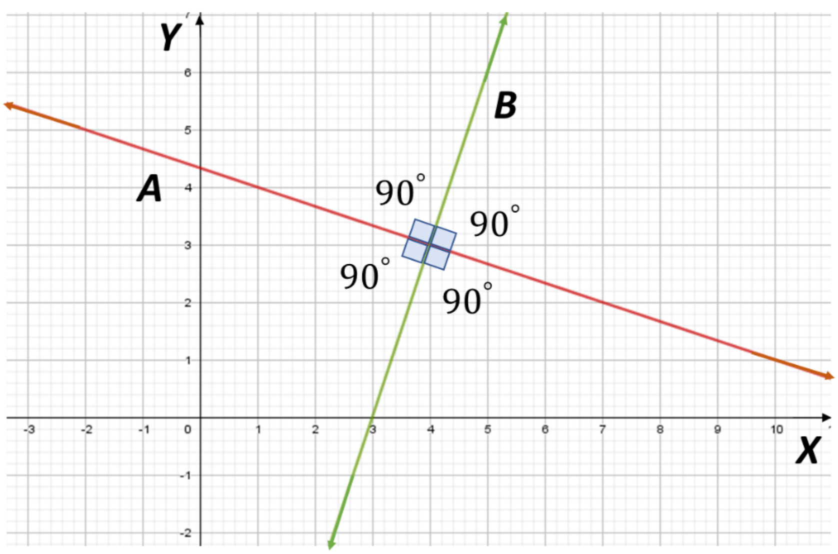
$x + 2y - 4 = 0$. Esto se observa en la siguiente figura.



Rectas perpendiculares y rectas oblicuas

Dos **rectas** son **perpendiculares** si se cortan y forman 4 ángulos rectos.

Ejemplo:



Las rectas A y B son **perpendiculares** porque al cortarse forman 4 ángulos rectos.

Si las rectas al cortarse no forman ángulos rectos, a las rectas se les llama **oblicuas.**

Si la recta A tiene como pendiente m_1 y la recta B tiene como pendiente m_2 entonces las rectas A y B serán perpendiculares si se cumple que el producto de sus pendientes es -1 y se expresa de la siguiente manera, a esta relación se le conoce también como condición de perpendicularidad:

$$\boldsymbol{m_1} * \boldsymbol{m_2} = -\mathbf{1}$$

$$\text{O bien} \quad \boldsymbol{m_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_2}}$$

Ejemplo. La recta A tiene como ecuación $2x - 4y + 4 = 0$ y la ecuación de la recta B es $2x + y - 4 = 0$, determina si son rectas perpendiculares.

Observamos que las ecuaciones de las rectas A y B están expresadas en su forma general

$Ax + By + C = 0$ y podemos obtener la pendiente con la relación $m = -\frac{A}{B}$ por lo que procedemos deducir las pendientes de las rectas.

Determinamos la pendiente de la recta A

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \boldsymbol{A}}}{2x} - \underset{\substack{\uparrow\\ \boldsymbol{B}}}{4y} + 4 = 0$$

Resultando $A = 2$ y $B = -4$

Enseguida se sustituyen los valores de $A = 2$ y $B = -4$ en la relación de pendiente

$$\boldsymbol{m_1} = -\frac{A}{B}$$

$$\boldsymbol{m_1} = -\frac{2}{(-4)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{m_1} = \frac{1}{2}$ es la pendiente de la recta A.

De la misma manera procedemos a encontrar la pendiente de la recta B

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \boldsymbol{A}}}{2x} + \underset{\substack{\uparrow\\ \boldsymbol{B}}}{y} - 4 = 0$$

Resultando $A = 2$ y $B = 1$

Enseguida se sustituyen los valores de $A = 2$ y $B = 1$ en la relación de pendiente

$$\boldsymbol{m_2} = -\frac{A}{B}$$

$$\boldsymbol{m_2} = -\frac{2}{(1)} = -2$$

Por lo tanto $\boldsymbol{m_2} = -2$ es la pendiente de la recta B.

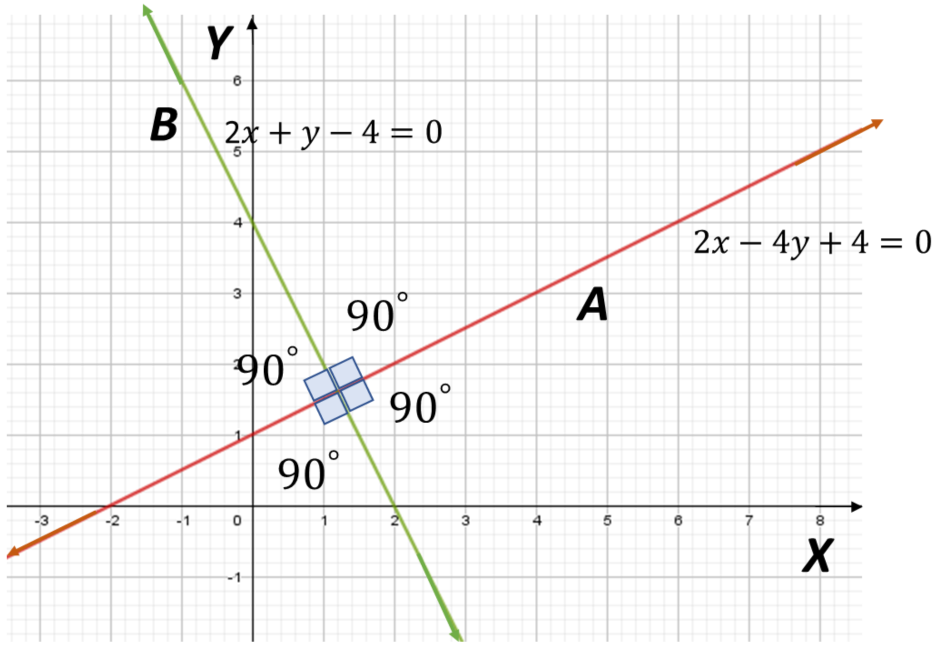
Como ya tenemos las pendientes de las dos rectas A y B,

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \textit{Pendiente} \\ & & & & \textit{de la Recta } \mathrm{A} \\ & & & & \downarrow \\ \textit{Recta } \mathrm{A} & \longrightarrow & 2x - 4y + 4 = 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{m_1} = \frac{1}{2} \\ \textit{Recta } \mathrm{B} & \longrightarrow & 2x + y - 4 = 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{m_2} = -2 \\ & & & & \uparrow \\ & & & & \textit{Pendiente} \\ & & & & \textit{de la Recta } \mathrm{B} \end{array}$$

Procedemos a verificar si las rectas A y B son perpendiculares.

$\boldsymbol{m_1} * \boldsymbol{m_2} = \mathbf{-1}$	Condición de perpendicularidad
$\boldsymbol{m_1} = \frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{m_2} = -2$	Pendientes de las rectas A y B
$(\frac{1}{2})(-2) = \mathbf{-1}$	Sustituyendo valores de las pendientes
$(\frac{-2}{2}) = \mathbf{-1}$	Resolviendo el producto
$\mathbf{-1} = \mathbf{-1}$	Simplificando

Como la relación $\boldsymbol{m_1} * \boldsymbol{m_2} = \mathbf{-1}$**,** se cumple, entonces concluimos que las rectas A y B son perpendiculares y lo observamos en el siguiente gráfico.



Ejemplo. ¿Cuál es la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(-2,2)$ y es perpendicular a la recta $4x - y + 2 = 0$?

Determinamos la pendiente de la recta que tiene como ecuación $4x - y + 2 = 0$ con la relación $m = -\frac{A}{B}$

$$\underset{A}{4x} - \underset{B}{y} + 2 = 0$$

Resultando $A = 4$ y $B = -1$

Enseguida se sustituyen los valores de $A = 4$ y $B = -1$ en la relación de pendiente

$$\boldsymbol{m_1} = -\frac{A}{B}$$

$$\boldsymbol{m_1} = -\frac{4}{(-1)} = 4$$

Por lo tanto $\boldsymbol{m_1} = 4$ es la pendiente de la recta $4x - y + 2 = 0$.

Como necesitamos conocer la pendiente de la perpendicular, sustituimos en la condición de perpendicularidad el valor de la pendiente $\boldsymbol{m_1} = 4$

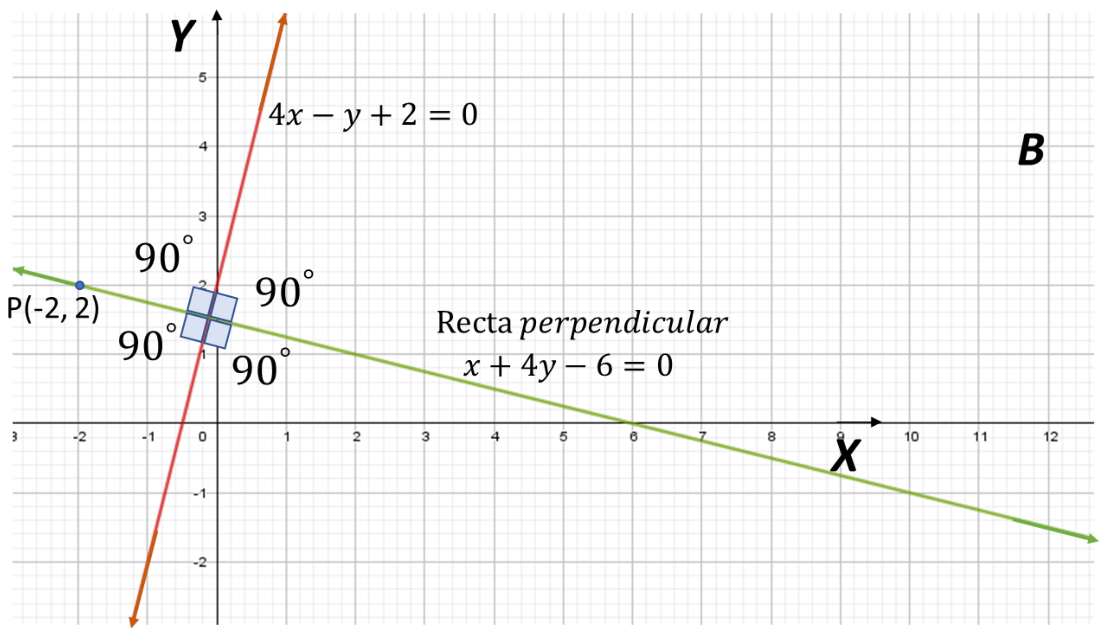
$\boldsymbol{m_1 * m_2 = -1}$	Condición de perpendicularidad
$m_1 = 4$	Pendientes de las rectas $4x - y + 2 = 0$
$(4)(m_2) = -1$	Sustituyendo el valor de la pendiente $m_1 = 4$
$\frac{(4)(m_2)}{4} = \frac{-1}{4}$	Dividiendo entre 4 ambos miembros para no romper la igualdad.
$\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{4}}$	Simplificando obtenemos la pendiente de la recta perpendicular a $4x - y + 2 = 0$

Como sabemos que la recta perpendicular tiene pendiente $\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{4}}$ y pasa por el punto $P(-2, 2)$ entonces en la ecuación de la recta punto pendiente, sustituimos los valores de la pendiente y las coordenadas del punto.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	Ecuación de la recta punto pendiente
$m = -\frac{1}{2}$ y $P(-2, 2)$	Pendiente y punto por donde va a pasar la recta paralela.
$y - 2 = \left(-\frac{1}{4}\right)(x - (-2))$	Sustituyendo valores
$4(y - 2) = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(x + 2)$	Multiplicando por 4 ambos miembros.
$4y - 8 = -1(x + 2)$	Simplificando
$4y - 8 = -x - 2$	Resolviendo el producto en el segundo miembro
$x + 4y - 8 + 2 = 0$	Igualando a cero

$x + 4y - 6 = 0$	Ecuación de la recta

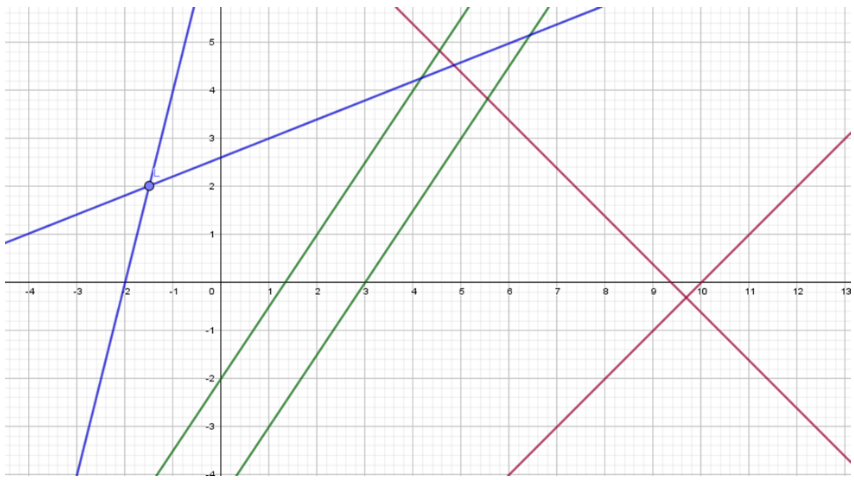
Concluimos que la recta $x + 4y - 6 = 0$ que pasa por el punto $P(-2, 2)$ es perpendicular a la recta $4x - y + 2 = 0$, esto se observa en la siguiente figura.



Practicando

A continuación, se presentan cinco ejercicios, en el primero se presentan figuras que a partir de ellas deberás deducir e identificar algunos elementos de las rectas paralelas, rectas perpendiculares u oblicuas y realizar el procedimiento correspondiente para encontrar lo que se te pide.

1. En la siguiente figura identificar que rectas son paralelas, perpendiculares y oblicuas.



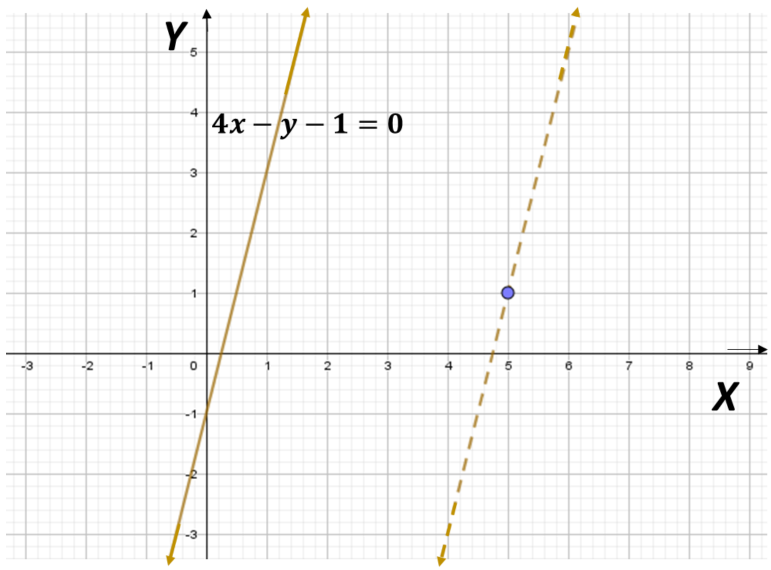
Colocar el nombre de las rectas de acuerdo a su color

Rectas de color azul___________________________

Rectas de color verde__________________________

Rectas de color marrón________________________

2. En la siguiente figura se muestran una recta con su ecuación y un punto por donde pasa una paralela. Deduce cuales son las coordenadas del punto y encuentra la ecuación que falta de la recta paralela.



Apoyo:

A partir de la figura debes deducir las coordenadas del punto y de la ecuación obtener la pendiente. Como se trata de rectas paralelas deben tener la misma pendiente. Ya con las coordenadas del punto y la pendiente, sustituir los valores en la ecuación de la recta punto-pendiente y realizar las operaciones y simplificaciones correspondientes.

3. La ecuación de una recta es $2x - y - 3 = 0$, encontrar la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto $P(-3, 1)$.
   Apoyo:

   A partir de la ecuación de la recta $2x - y - 3 = 0$ encontrar la pendiente y después sustituir los valores en la ecuación de la recta punto-pendiente y realizar las operaciones y simplificaciones correspondientes.

4. Las ecuaciones de dos rectas son respectivamente; $2x - y - 5 = 0$ y $2x - y - 3 = 0$, determinar si son rectas paralelas, perpendiculares u oblicuas.
   Apoyo:
   Debes encontrar las pendientes de cada recta y después verificar la condiciones de paralelismo y perpendicularidad, recordando:

$\boldsymbol{m_1 = m_2}$ Si las pendientes son iguales entonces son **rectas paralelas**

$\boldsymbol{m_1 * m_2 = -1}$ Si el producto de sus pendientes es igual a -1, entonces son **rectas Perpendiculares.** *Si no se cumple ninguna de las anteriores, entonces son **rectas oblicuas**.

5. La ecuación de una recta es $3x + y - 1 = 0$, encontrar ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto $P(6, 4)$.

   Apoyo:

   A partir de la ecuación de la recta $2x - y - 3 = 0$ encontrar la pendiente $\boldsymbol{m_1}$ y sustituir en la relación $\boldsymbol{m_1} * \boldsymbol{m_2} = -\mathbf{1},$ para para determinar la pendiente $\boldsymbol{m_2}$ que será la pendiente de la perpendicular. Después sustituir los valores del punto $P(6, 4)$ y de la pendiente $\boldsymbol{m_2}$ den la ecuación de la recta punto-pendiente y realizar las operaciones y simplificaciones correspondientes.

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico en una representación gráfica rectas paralelas, perpendiculares u oblicuas.		
Puedo determinar si dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas cuando conozco sus ecuaciones generales.		
Soy capaz de determinar la ecuación de una recta paralela si conozco un punto por donde pasa y la ecuación general de la otra.		
Puedo identificar la ecuación de una recta perpendicular si conozco un punto por donde pasa y la ecuación general de la otra.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

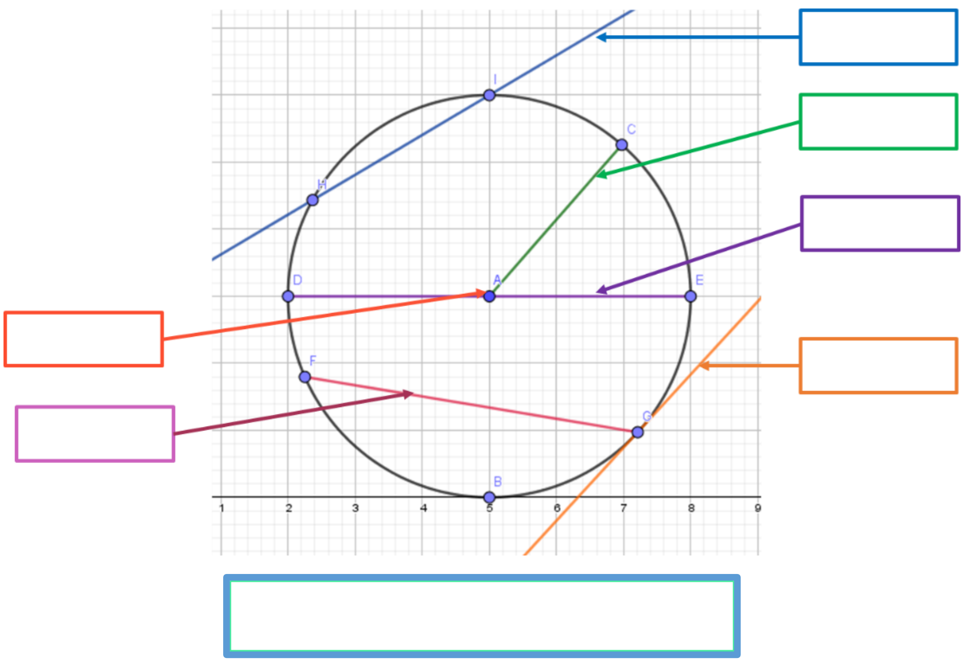
Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Fuenlabrada de la Vega S. (2016). Geometría Analítica. México: MCGRAW HILL
- Matemática Divertida (2017). Matemática Divertida: Identifica Rectas Paralelas Oblicuas Perpendiculares. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=qMclU6-w2Hc

Lección 8. Elementos de una circunferencia

Explorando

Observa con mucha atención la siguiente figura y coloca de manera correcta en los rectángulos, los nombres de los elementos señalados por las flechas: Radio, Secante, Tangente, Cuerda, Diámetro, Centro, también coloca en el rectángulo el nombre de la figura.



Comprendiendo

Elementos de una circunferencia

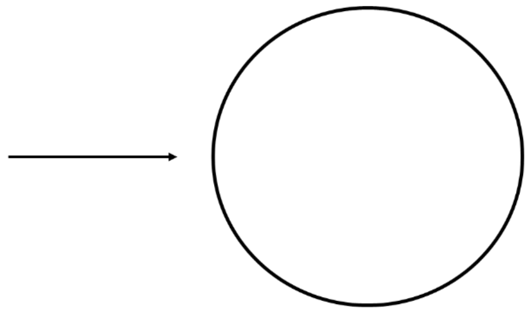
¿Qué es una circunferencia?

Comprendamos que es una circunferencia para enseguida definirla.

¿Puedes imaginar el contorno de una ficha como una sucesión de puntos?

Si a esta ficha pintamos la sucesión de puntos de su contorno de color negro, ¿Qué figura de color negro se observa?

Contorno de la ficha pintado de negro

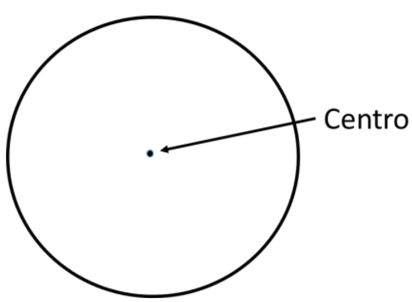


Contorno de la ficha

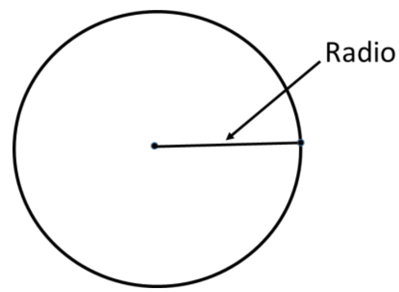
Entonces, podemos definir que una **circunferencia** es una sucesión de puntos que equidistan de un puto fijo llamado centro.

Los elementos más importantes de una circunferencia son el centro y el radio. Conociendo estos dos elementos, podemos trazar el lugar geométrico y definir algebraicamente su ecuación.

- El **centro** se puede definir como el punto interior que equidista o que se encuentra a la misma distancia de todos los puntos de una circunferencia, ejemplo:

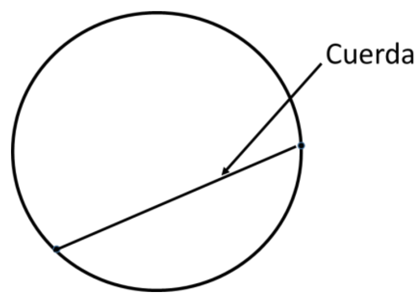


- El **radio** es el segmento de recta que une al centro con cualquier punto de la circunferencia.



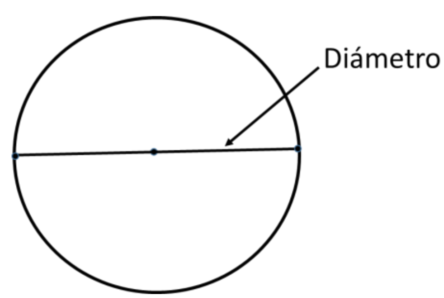
Otros elementos de la circunferencia son los siguientes.

- La **cuerda** es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.

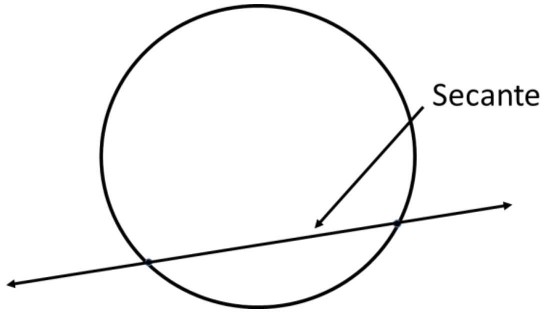


- El **diámetro** es la mayor cuerda que se puede trazar en una circunferencia. Pasa por el centro y su medida es igual a dos radios. Por lo tanto, su relación con el radio se puede expresar:

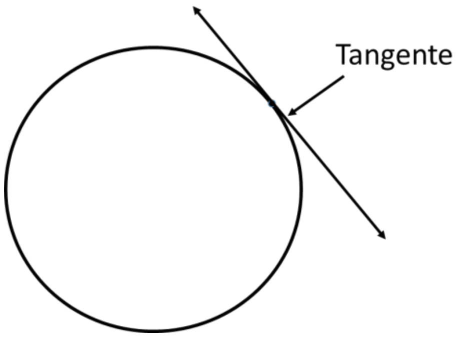
$$D = 2r$$



- La **secante**, es la recta que pasa por dos puntos de una circunferencia.



- La **tangente**, es la recta que toca solamente un punto de la circunferencia.



La circunferencia como lugar geométrico

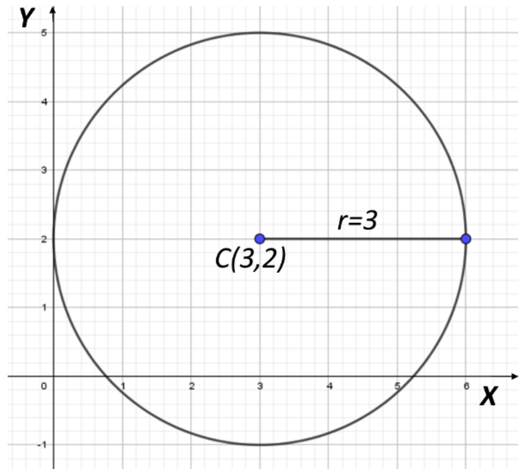
La circunferencia también se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro, en otras palabras, a la representación gráfica de la circunferencia en el plano de coordenadas también se le conoce como lugar geométrico.

Esta definición nos traslada al plano cartesiano, por lo tanto, trabajaremos en esta lección algunos procedimientos para determinar los elementos más importantes de la circunferencia.

Podemos graficar una circunferencia si conocemos el centro y el radio.

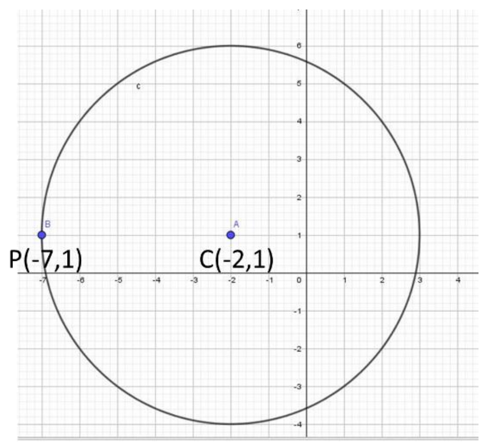
Ejemplo: Representar gráficamente una circunferencia que tiene como $centro: C(3,2)\ y\ radio: r = 3\ u.$

Primero ubicamos en el plano cartesiano el centro, que tiene como coordenadas (3,2) y enseguida abrimos el compás 3 u y trazamos la circunferencia.



También podemos encontrar el radio de una circunferencia si conocemos el centro y un punto por donde pasa.

Ejemplo. Encontrar el radio de una circunferencia que tiene como $centro$: $C(-2,1)$ y pasa por el punto $P(-7,1)$.



Para encontrar el radio se aplica la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$\overline{CP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para aplicar la fórmula, podemos tomar al centro $C(-2,1)$ como primer punto y como segundo punto a $P(-7,1)$, entonces podemos asignar los valores de las coordenadas de la siguiente manera:

Primer punto C(-2,1) Segundo punto: P(-7,1)

$C(-2{,}1)$

$x_1 \qquad y_1$

$P(-7{,}1)$

$x_2 \qquad y_2$

Entonces como en el primer punto se definen las coordenadas (x_1, y_1) y en el segundo punto como (x_2, y_2) podemos decir que:

$x_1 = -2 \qquad y_1 = 1 \qquad x_2 = -7 \qquad y_2 = 1$

Por lo tanto, si ordenamos x_1, x_2, y_1, y_2, tenemos que:

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -7 \qquad y_1 = 1 \qquad y_2 = 1$

Y sustituyendo en la fórmula tenemos:

$\overline{CP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$ Fórmula de distancia entre dos puntos

$\overline{CP} = \sqrt{\left(-7-(-2)\right)^2 + (1-1)^2} =$ Sustituyendo valores x_2, x_1, y_2, y_1

$\overline{CP} = \sqrt{(-7+2)^2 + (0)^2} =$ Resolviendo las operaciones indicadas en cada paréntesis,

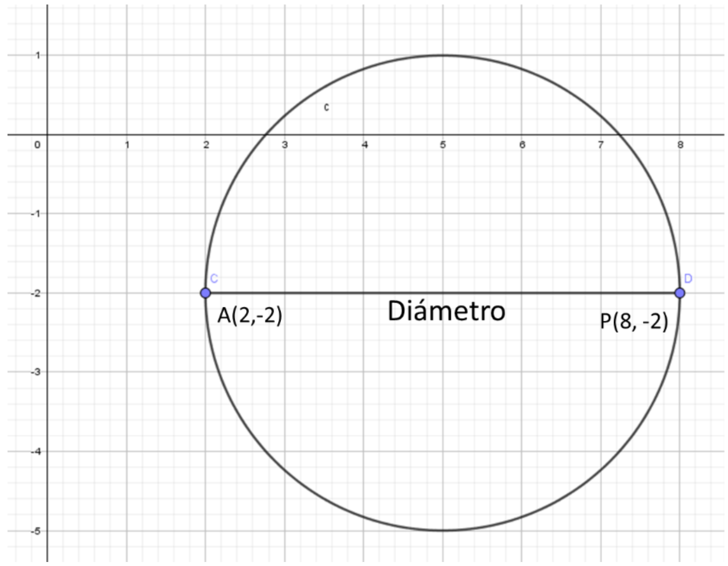
$\overline{CP} = \sqrt{(-5)^2} =$ Elevando al cuadrado

$\overline{CP} = \sqrt{25} = 5$ Al resolver la raíz cuadrada obtenemos el valor del radio

Por lo que podemos concluir que el radio de la circunferencia es $r = 5\,u$

También podemos encontrar los elementos de una circunferencia y su lugar geométrico si conocemos los puntos de los extremos del diámetro.

Ejemplo: Determinar el centro, radio y lugar geométrico de una circunferencia que tiene como diámetro la cuerda limitada por los puntos: $A(2, -2)$ y $B(8, -2)$.



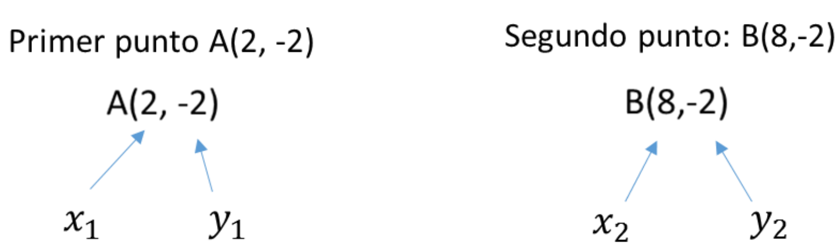
Para encontrar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia, tenemos que observar en el problema que vamos a resolver, que tenemos como datos los puntos que son los extremos del diámetro, por lo tanto, el centro será el punto medio del diámetro y el radio se podrá determinar calculando la longitud media del diámetro o bien calculando la distancia del centro a uno de los extremos del diámetro.

Resolveremos esta situación encontrando el centro que será el punto medio de los puntos $A(2,-2)$ y $B(8,-2)$, y enseguida para determinar el valor del radio, calculando la distancia del centro a uno de los extremos del diámetro.

Para encontrar el centro tenemos que aplicar la fórmula de **Punto Medio entre dos puntos.**

$$PM\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Para aplicar la fórmula, podemos tomar a $A(2,-2)$ como primer punto y a $B(8,-2)$ como segundo punto, entonces podemos asignar los valores de las coordenadas de la siguiente manera:



Entonces como se definen las coordenadas (x_1, y_1) en el primer punto y como (x_2, y_2) en el segundo punto podemos decir que:

$x_1 = 2$ $\quad y_1 = -2$ $\quad x_2 = 8$ $\quad y_2 = -2$

Por lo tanto, si ordenamos x_1, x_2, y_1, y_2, tenemos que:

$x_1 = 2$ $\quad x_2 = 8$ $\quad y_1 = -2$ $\quad y_2 = -2$

Y sustituyendo en la fórmula tenemos:

$PM\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	Fórmula de punto medio
$PM\left(\frac{2+8}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right)$	Sustituyendo valores x_1, x_2, y_1, y_2
$PM\left(\frac{10}{2}, \frac{-2-2}{2}\right)$	Resolviendo las operaciones indicadas
$PM\left(5, \frac{-4}{2}\right)$	Al simplificar obtenemos
$PM(5, -2)$	Coordenadas del punto medio.

Por lo tanto, concluimos que el punto medio de A y B es $PM(5, -2)$ que es el centro de la circunferencia.

Enseguida procedemos a encontrar el radio.

Para encontrar el radio se aplica la fórmula **distancia entre dos puntos.**

$$\overline{CP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para aplicar la fórmula, podemos tomar como primer punto el punto medio que es el centro de la circunferencia $C(5, -2)$ y como segundo punto a $A(2, -2)$ que es un extremo del diámetro, entonces podemos asignar los valores de las coordenadas de la siguiente manera:

Primer punto C(5, -2)

C(5, -2)

x_1 y_1

Segundo punto: A(2,-2)

A(2,-2)

x_2 y_2

Entonces como se definen las coordenadas (x_1, y_1) en el primer punto y como (x_2, y_2) en el segundo punto podemos decir que:

$$x_1 = 5 \qquad y_1 = -2 \qquad\qquad x_2 = 2 \qquad y_2 = -2$$

Por lo tanto, si ordenamos x_1, x_2, y_1, y_2, tenemos que:

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 2 \qquad\qquad y_1 = -2 \qquad y_2 = -2$$

Y sustituyendo en la fórmula tenemos:

$\overline{CP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$ Fórmula de distancia entre dos puntos

$\overline{CP} = \sqrt{(2-5)^2 + \left(-2-(-2)\right)^2}$ Sustituyendo valores x_1, x_2, y_1, y_2

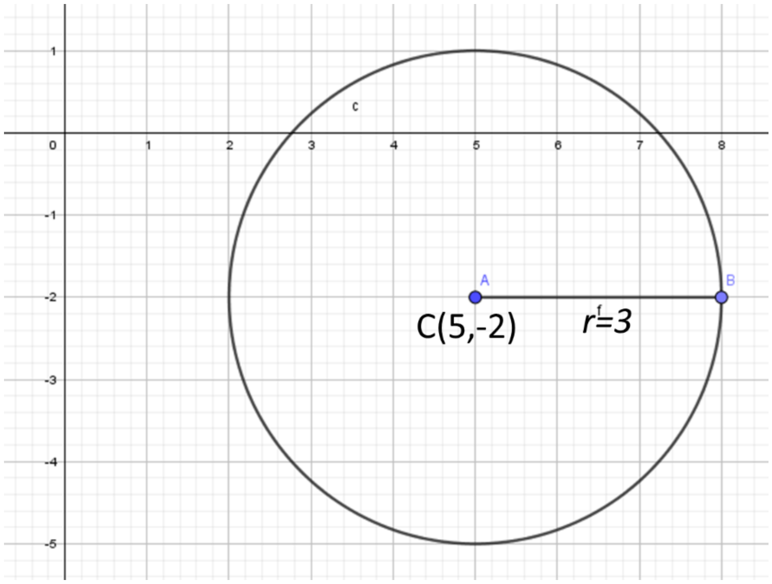
$\overline{CP} = \sqrt{(-3)^2 + (-2+2)^2}$ Resolver las operaciones indicadas en cada paréntesis,

$\overline{CP} = \sqrt{9 + (0)^2}$ Simplificando

$\overline{CP} = \sqrt{9} = 3u$ Y al resolver la raíz cuadrada obtenemos el valor del radio

Por lo que podemos concluir que el radio de la circunferencia es $r = 3\ u$

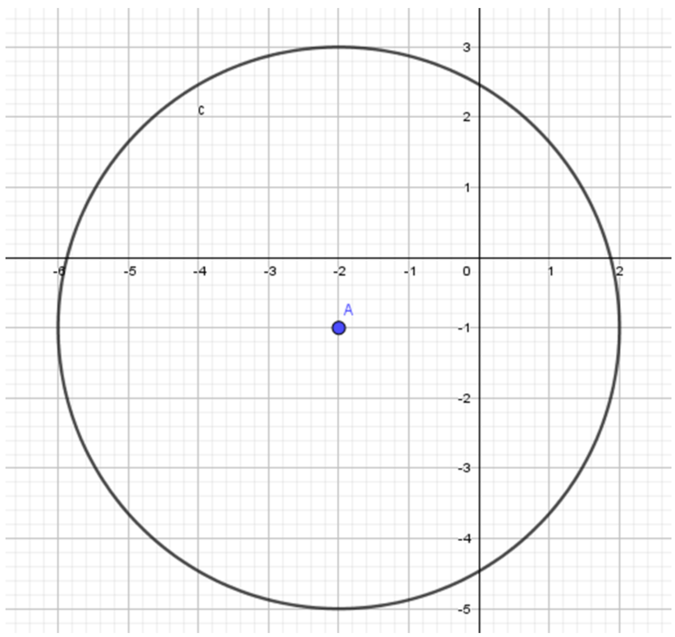
Como ya conocemos el centro $PM(5,-2)$ y el radio $r = 3\ u$, de la circunferencia, entonces podemos encontrar su lugar geométrico en el plano cartesiano.



Practicando

A continuación, se presentan seis ejercicios para que practiques, en los ejercicios 1 y 2 no requieres hacer cálculos, solamente deducir la respuesta a partir de la figura. En los ejercicios 3, 4, 5 y 6, para encontrar la respuesta requieres realizar los procedimientos descritos en la sección anterior.

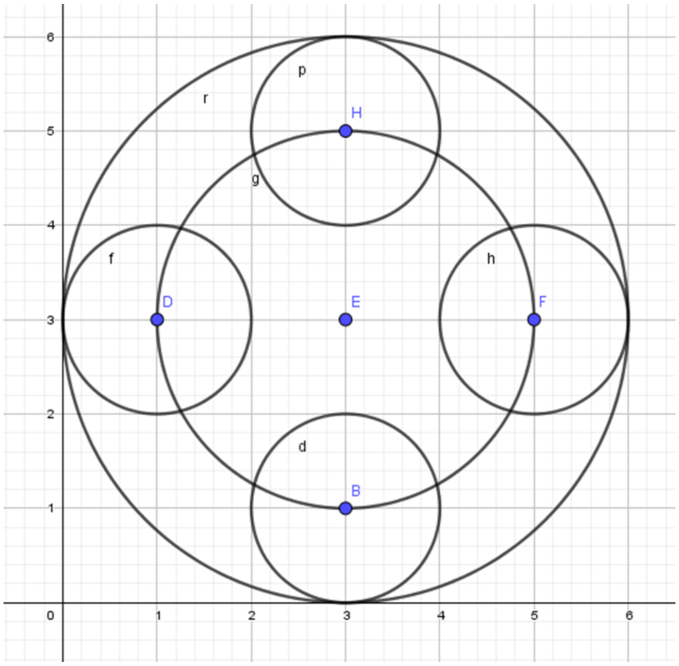
1. A partir de la siguiente circunferencia, deduce cuales son las coordenadas del centro y la medida su radio.



Centro:______________________

Radio:______________________

2. En la siguiente figura, si el radio de la circunferencia menor es de 5 *u*, ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia mayor?



Diámetro de circunferencia mayor: ___________________________

3. Grafica una circunferencia que tiene como diámetro una cuerda que une los puntos A(2,2) y B(10,6).

Apoyo:

Recuerda que para graficar una circunferencia debes conocer el centro y su radio.

Para encontrar el **centro de la circunferencia** debes de utilizar el procedimiento de punto medio entre dos puntos, y una vez encontrado el punto medio para encontrar **el radio** deberás aplicar el procedimiento de distancia entre dos puntos utilizando el punto medio como primer punto y como otro punto un extremo del diámetro de la circunferencia.

4. Encuentra el radio de una circunferencia que tiene como centro el punto C(4,2) y pasa por el punto P(8,-6).

   Apoyo:

   Para encontrar **el radio** deberás aplicar el procedimiento de distancia entre dos puntos.

5. Encuentra el diámetro de una circunferencia que tiene como centro el punto C(2,4) y pasa por el punto P(6,-2)

   Apoyo:

   Para encontrar el **diámetro** primero deberás encontrar el radio aplicando el procedimiento de distancia entre dos puntos y una vez encontrado su valor, multiplicarlo por 2.

6. Cuál es el centro de una circunferencia cuyo diámetro está limitado por los puntos A(-4,-2) y B(2,-2).
   Apoyo:
   Para encontrar el **centro de la circunferencia** debes de utilizar el procedimiento de punto medio entre dos puntos.

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico en una representación gráfica de circunferencia: el centro, el radio y el diámetro.		
Soy capaz de determinar las coordenadas del centro de una circunferencia dados los extremos de su diámetro.		
Sé encontrar el radio de una circunferencia si conozco el centro y un punto por donde pasa la circunferencia.		
Puedo representar en el plano cartesiano una circunferencia si conozco el centro y radio de ella.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Fuenlabrada de la Vega S. (2016). Geometría Analítica. México: MCGRAW HILL
- Alonso Borrego José Luis. (s.f). Elementos de la circunferencia [en línea]. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/SH5rPdB6
- Ingeniat. (2011). R30 L01 Elementos de la circunferencia. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=kSDes72Vy3A
- TutorialesdeMate. (2016). Grafica de circunferencia dado su centro y medida de radio con practica geogebra [video]. YouTube. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=XVv23C7f9ek

Lección 9. Ecuaciones de la circunferencia

Explorando

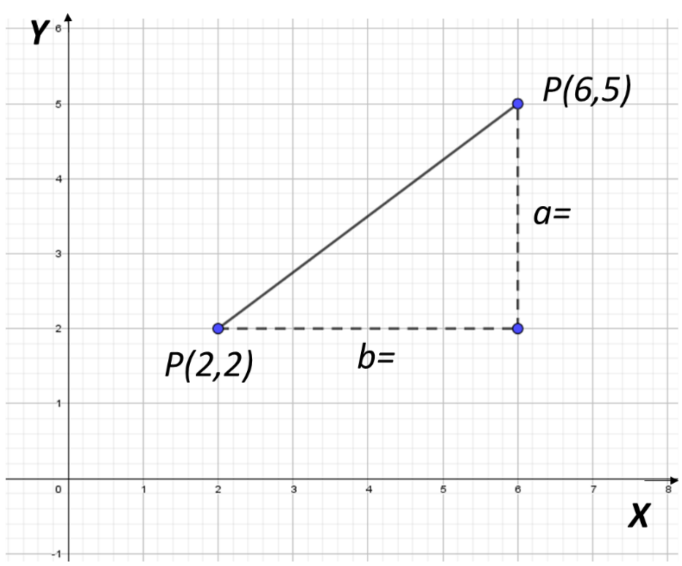
Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las características de un triángulo rectángulo?

2. ¿Qué enuncia el Teorema de Pitágoras?

3. ¿A qué producto notable corresponde la siguiente regla: "El cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término"?

4. En la siguiente figura, identifica el triángulo rectángulo, e indica la medida de sus catetos *a y b*. Toma como base las coordenadas de los puntos.

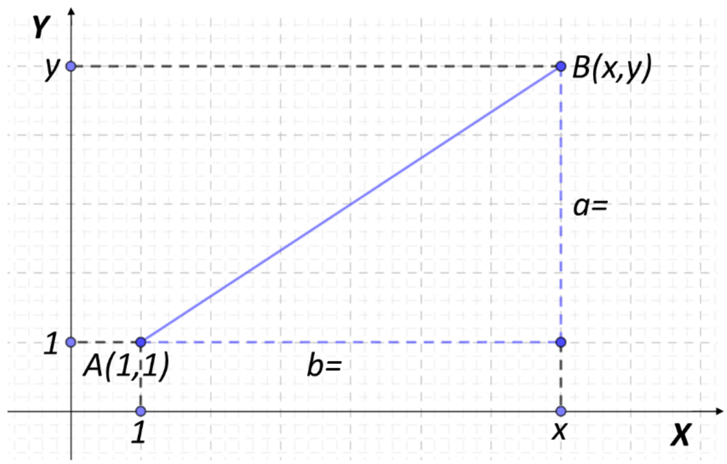


Medida del cateto *a* ______________________

Medida del cateto *b* ____________________

5. En las siguientes figuras, identifica el triángulo rectángulo e indica como se expresan algebraicamente los catetos. Toma como base las coordenadas de los puntos.

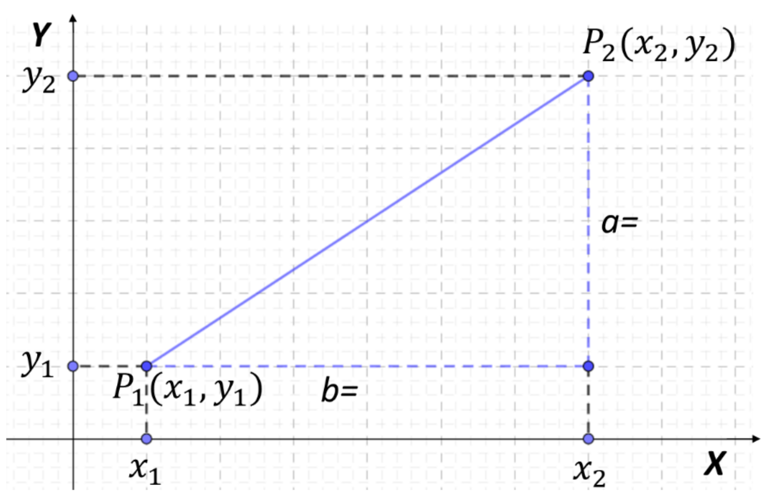
Figura 1



Medida del cateto *a* ____________________

Medida del cateto *b* ____________________

Figura 2



Medida del cateto *a* ____________________

Medida del cateto *b* ____________________

Comprendiendo

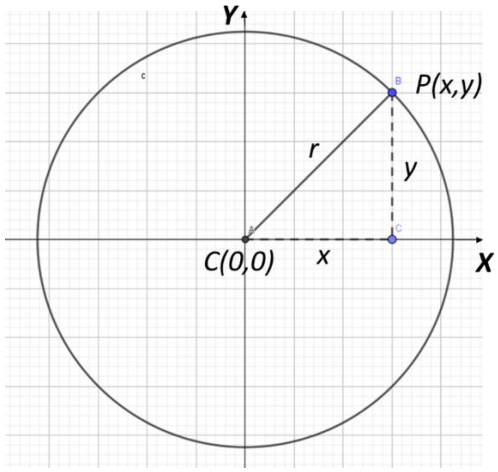
Ecuaciones de la circunferencia

Ecuación canónica

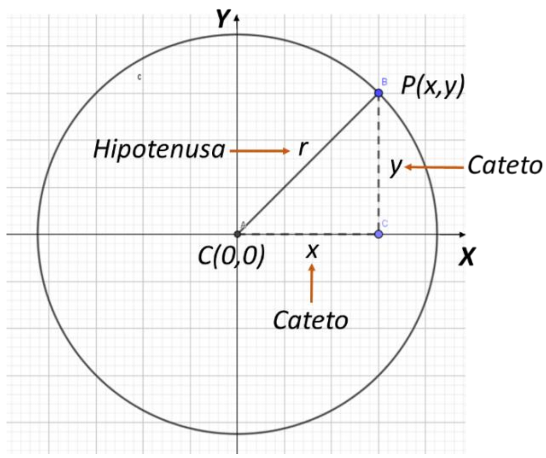
La *ecuación* de la circunferencia que tiene su centro en el origen se le llama **ecuación canónica**.

¿Pero cómo se obtiene?, observemos con atención.

En la siguiente figura, se aprecia una circunferencia que tiene el centro en el origen del plano cartesiano $C(0,0)$ y pasa por el punto $P(x,y)$.



También tenemos en la figura, un triángulo rectángulo con hipotenusa igual al radio de la circunferencia y catetos con medidas $\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{y}$.



Podemos aplicar el teorema de Pitágoras que relaciona el radio de la circunferencia y los catetos, recordemos que su enunciado dice “La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa” y se expresa algebraicamente de la siguiente manera:

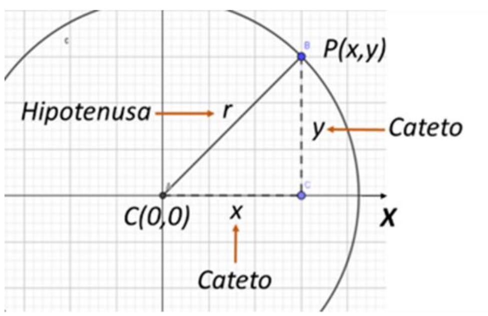
$a^2 + b^2 = h^2$, donde a y b son catetos y h es la hipotenusa.

Cuadrado de la hipotenusa

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Suma de los cuadrados de los catetos

Por lo tanto, sustituyendo valores en la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras tenemos:



Cuadrado de la hipotenusa

$$x^2 + y^2 = r^2$$

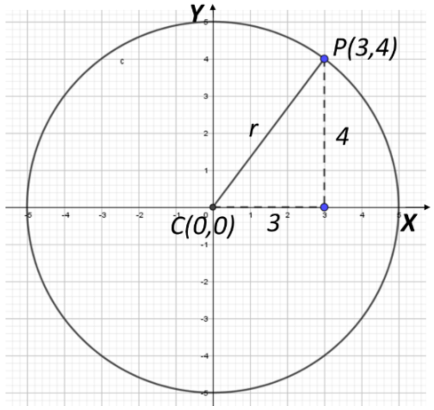
Suma de los cuadrados de los catetos

Y a la relación obtenida se le denomina **ecuación canónica de la circunferencia**.

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}}$$

Donde x , y son las coordenadas del punto por donde pasa la circunferencia y r es el radio.

Ejemplo. Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por el punto $P(3.4)$.



Como sabemos que el centro de la circunferencia está en el origen y el punto por donde pasa es $P(3{,}4)$, entonces procedemos a determinar su radio, y éste lo podemos encontrar sustituyendo las coordenadas del punto por donde pasa la circunferencia en la ecuación canónica y realizando las operaciones.

$x^2 + y^2 = r^2$	Ecuación canónica
$P(3{,}4)$	Punto por donde pasa la circunferencia.
$(3)^2 + (4)^2 = r^2$	Sustituyendo los valores de las coordenadas del punto $P(3{,}4)$
$9 + 16 = r^2$	Resultado de elevar al cuadrado el 3 y el 4
$25 = r^2$	Efectuando la suma
$r^2 = 25$	Aplicando la propiedad simétrica de la igualdad
$\sqrt{r^2} = \sqrt{25}$	Sacando raíz cuadrada
$r = 5$	Radio de la circunferencia

Sustituimos el valor del radio $r = 5$ en la ecuación canónica

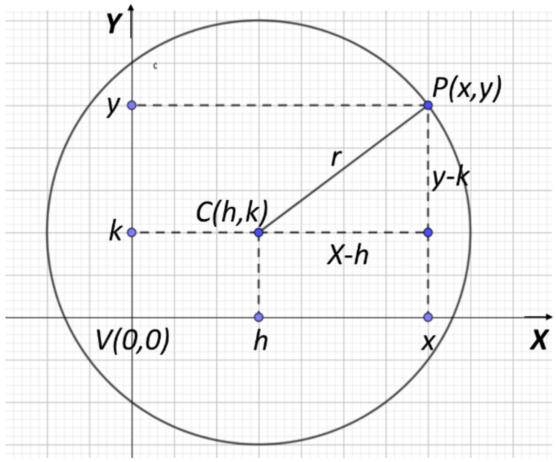
$x^2 + y^2 = r^2$	Ecuación canónica
$x^2 + y^2 = (5)^2$	Sustituyendo el valor del radio
$x^2 + y^2 = 25$	Ecuación de la circunferencia

Podemos concluir que $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 25}$**,** es la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el origen y pasa por el punto $P(3{,}4)$.

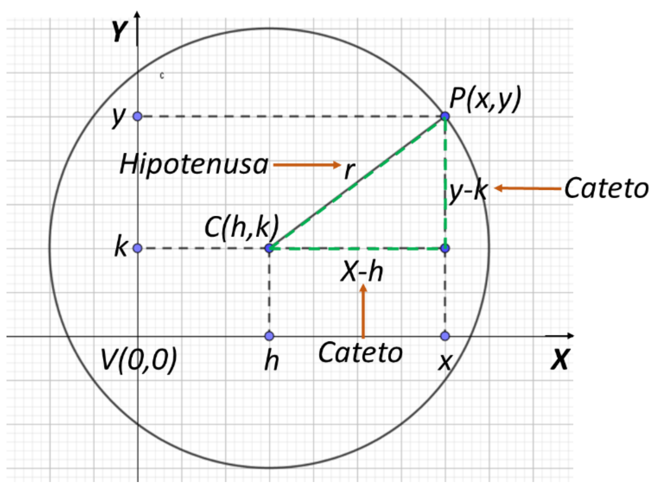
Ecuación ordinaria

La *ecuación* de la circunferencia que tiene su centro fuera del origen se llama **ecuación ordinaria**.

Veamos en la siguiente figura, una circunferencia con centro fuera del origen. La circunferencia tiene su centro con coordenadas $C(h, k)$ y pasa por el punto $P(x, y)$.

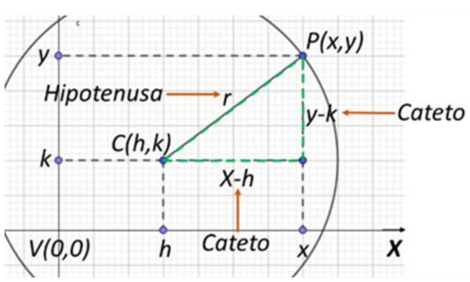


Al unir los puntos $C(h,k)$ y $P(x,y)$ se aprecia el radio de la circunferencia y al prolongar las coordenadas de los puntos, se forma un triángulo rectángulo con medidas en el **cateto horizontal** $x-h$ y en el **cateto vertical** $y-k$ y el radio como medida de la **hipotenusa**.



Al sustituir los valores de los catetos y el radio en la expresión algebraica del teorema de Pitágoras $a^2+b^2=h^2$, donde a y b son catetos y h es la hipotenusa, tenemos:

.



Cuadrado de la hipotenusa

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Suma de los cuadrados de los catetos

Y a la relación obtenida se le denomina **ecuación ordinaria de la circunferencia**.

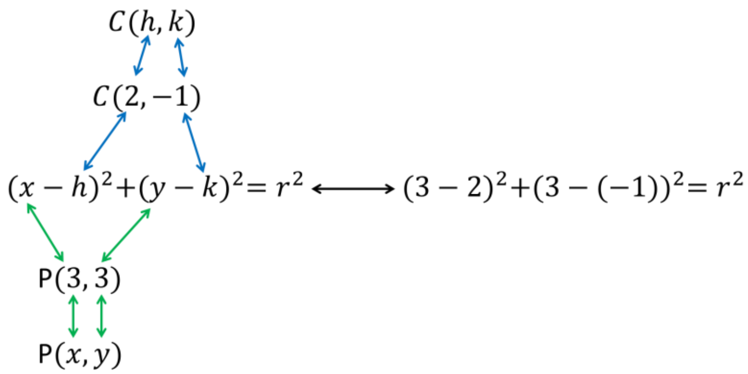
$$\boxed{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2=\boldsymbol{r}^2}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia que tiene como centro $C(2,-1)$ y pasa por el punto $P(3{,}3)$.

Como sabemos que el centro de la circunferencia está en el punto $C(2,-1)$ y conocemos el punto por donde pasa $P(3{,}3)$, entonces procedemos a determinar su radio y éste lo podemos encontrar sustituyendo las coordenadas de los puntos en la ecuación ordinaria y realizando las operaciones y simplificaciones correspondientes.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	Ecuación ordinaria
$C(2,-1)\ y\ \ P(3{,}3)$	Centro y punto por donde pasa la circunferencia.

El diagrama siguiente, muestra cómo se identifican los valores: h, k, x, y además como se realiza la sustitución en la ecuación de la circunferencia.



$(3-2)^2+(3-(-1))^2=r^2$	Sustituyendo los valores de las coordenadas del centro $C(2,-1)$ y del punto $P(3{,}3)$
$(1)^2+(3+1)^2=r^2$	Realizando operaciones y simplificando
$1+(4)^2=r^2$	Elevando al cuadrado y simplificando
$1+16=r^2$	Elevando al cuadrado
$17=r^2$	Efectuando la suma
$r^2=17$	Aplicando la propiedad simétrica de la igualdad
$\sqrt{r^2}=\sqrt{17}$	Sacando raíz cuadrada
$r=\sqrt{17}$	Radio de la circunferencia

Para encontrar la ecuación de la circunferencia, sustituimos las coordenadas del centro y el valor del radio en la ecuación ordinaria y procedemos a realizar las operaciones y su simplificación.

Como sabemos que el radio de la circunferencia es $r = \sqrt{17}$ y el centro $C(2,-1)$, sustituimos en la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Ecuación ordinaria
$C(2,-1)\ y\ r = \sqrt{17}$	Centro y radio de la circunferencia
$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{17})^2$	Sustituyendo valores

Recuerda que cuando se eleva al cuadrado una raíz cuadrada, se elimina el radical:

$$(\sqrt{17})^2 = (\cancel{\sqrt{}}17)^{\cancel{2}} = 17$$

porque $(\sqrt{17})^2 = \left((17)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (17)^{\frac{2}{2}} = 17^1 = 17$

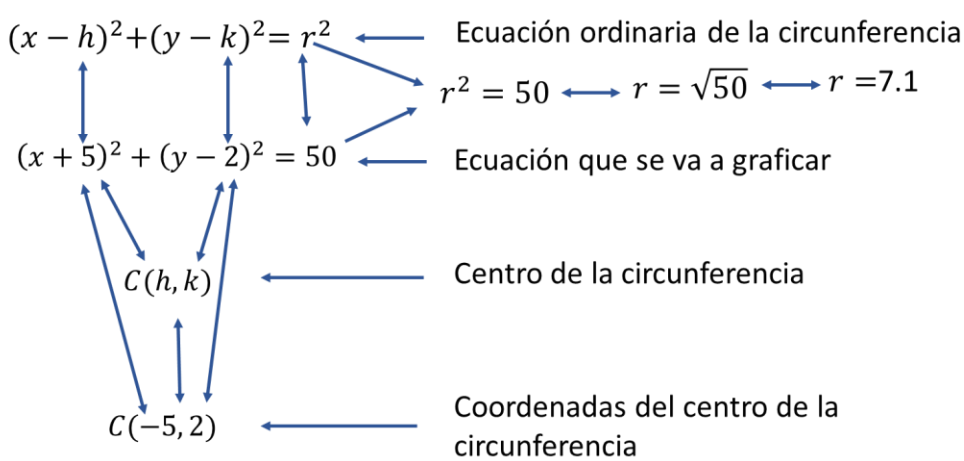
Por lo tanto, al simplificar obtenemos

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$	Ecuación ordinaria

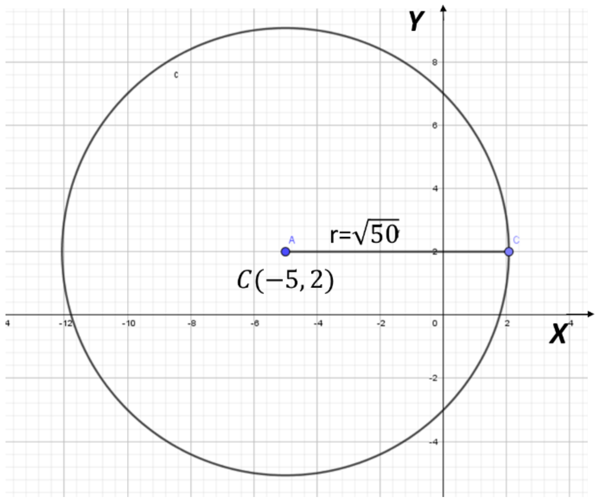
Entonces podemos concluir que la ecuación de la circunferencia que tiene como centro $C(2,-1)$ y pasa por el punto $P(2,3)$ es $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$

Ejemplo: Graficar la circunferencia cuya ecuación ordinaria es $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 50$

Como la ecuación ordinaria es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, entonces podemos deducir el centro y el radio. El siguiente diagrama muestra como se deduce el centro y el radio de la circunferencia.



Entonces si sabemos que el centro de la circunferencia es el punto $C(-5,2)$ y el radio $r = \sqrt{50}$, la gráfica de la circunferencia es la siguiente:



Ecuación general

La ecuación general de la circunferencia se obtiene desarrollando la ecuación ordinaria.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuación ordinaria de la circunferencia.

$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados.

Lo anterior se obtiene al desarrollar los cuadrados $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ o aplicando la regla del cuadrado de un binomio:

Regla del cuadrado de un binomio: "El cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término"

Al desarrollar $(x-h)^2$ se obtiene:

$$(x-h)^2=x^2-2xh+h^2$$

Cuadrado del primer término

Cuadrado del segundo término

Doble producto del primer término por el segundo término

Y al desarrollar $(y-k)^2$:

$$(y-k)^2=y^2-2yk+k^2$$

Cuadrado del primer término

Cuadrado c término

Doble producto del primer término por el segundo término

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ Ordenando términos e igualando a cero

Se ordenan los términos alfabéticamente, de acuerdo al grado y al final se colocan los términos constantes.

Como la **ecuación general de la circunferencia** es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces procedemos a realizar un reemplazo en $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ de la siguiente manera:

$-2h \longrightarrow$ D $\longleftarrow$ Coeficiente de x

$-2k \longrightarrow$ E $\longleftarrow$ Coeficiente de y

$h^2 + k^2 - r^2 \longrightarrow$ F $\longleftarrow$ Términos constantes (números que se obtienen al elevar al cuadrado las coordenadas del centro y el radio)

Sustituyendo **D, E, y F** en la ecuación anterior:

$$x^2 + y^2 - \underbrace{2h}_{D}x - \underbrace{2k}_{E}y + \underbrace{h^2 + k^2 - r^2}_{F} = 0$$

A la relación que se obtiene se le conoce como **Ecuación general de la circunferencia**

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$

Ejemplo. Encontrar la ecuación general de la circunferencia que tiene como centro las coordenadas $C(-1,-2)$ y pasa por el punto $P(3,5)$.

Observamos que se trata de una circunferencia que tiene el centro fuera del origen, entonces procedemos a encontrar el radio sustituyendo las coordenadas del centro $C(-1,-2)$ y el punto $P(3,5)$ en la ecuación ordinaria.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Ecuación ordinaria
$C(-1,-2)$ y $P(3,5)$	Centro y punto por donde pasa la circunferencia.
$(3-(-1))^2 + (5-(-2))^2 = r^2$	Sustituyendo los valores de las coordenadas del centro $C(-1,-2)$ y del punto $P(3,5)$
$(3+1)^2 + (5+2)^2 = r^2$	Realizando operaciones y simplificando
$(4)^2 + (7)^2 = r^2$	Elevando al cuadrado y simplificando
$16 + 49 = r^2$	Elevando al cuadrado
$65 = r^2$	Efectuando la suma

$r^2 = 65$ Aplicando la propiedad simétrica de la igualdad

$\sqrt{r^2} = \sqrt{65}$ Sacando raíz cuadrada

$r = \sqrt{65}$ Radio de la circunferencia

Enseguida procedemos a sustituir en la ecuación ordinaria, las coordenadas del centro $C(-1,-2)$ y su radio $r = \sqrt{65}$, desarrollamos las expresiones algebraicas y simplificamos.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ Ecuación ordinaria

$C(-1,-2)$ y $r = \sqrt{65}$ Punto por donde pasa la circunferencia y radio

$(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = (\sqrt{65})^2$ Sustituyendo las coordenadas del centro y el radio

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 65$ Simplificando y elevando al cuadrado el radio

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 65$ Desarrollando los cuadrados

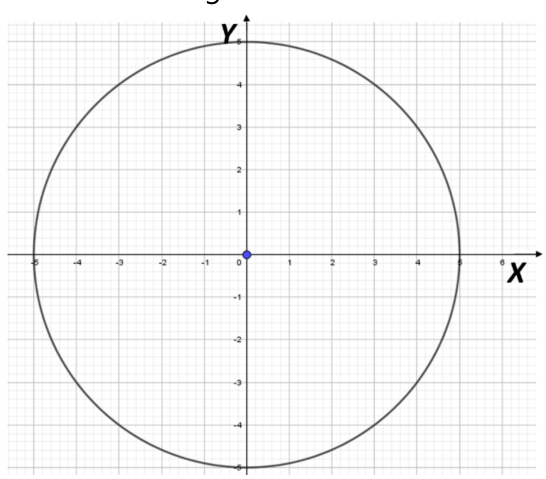
$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 + 1 - 65 = 0$ Ordenando términos e igualando a cero

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x + 4y - 60 = 0}$ Simplificamos y obtenemos la **ecuación general de la circunferencia.**

A continuación, se presentan seis ejercicios para que practiques.
En el ejercicio 1, se presentan dos figuras, no requieres hacer cálculos para encontrar el centro y el radio de las circunferencias, solamente deducirlos a partir de las figuras y una vez que los deduzcas realizar el procedimiento para encontrar las ecuaciones de la circunferencia de cada figura.
En los ejercicios 2, 3, 4, 5 y 6 para encontrar la respuesta se requiere realizar los procedimientos descritos en la sección anterior.

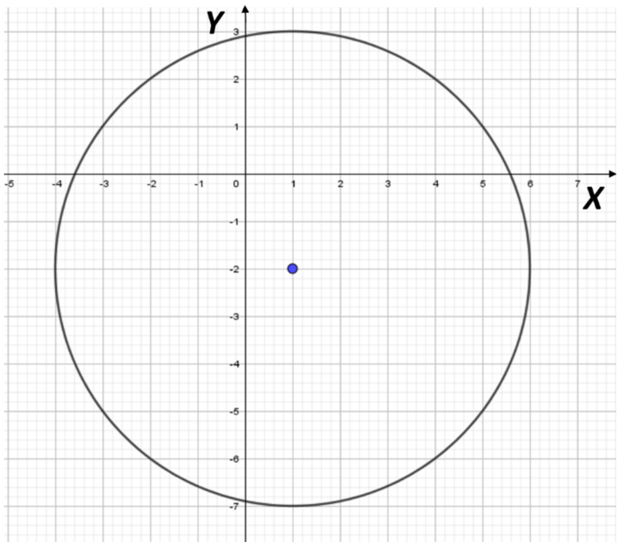
1. A partir de las siguientes figuras, deduce cuales son las coordenadas del centro, la medida de su radio y encuentra la ecuación de la circunferencia.

Figura 1



Apoyo:
Observa que el centro de la circunferencia está en el origen y partir de la figura debes deducir la medida del radio. Enseguida sustituir el radio en la ecuación canónica de la circunferencia y elevar el radio al cuadrado.

Figura 2



Apoyo:

Observa que el centro de la circunferencia está fuera del origen y partir de la figura debes deducir la medida del radio y las coordenadas del centro. Enseguida sustituir la medida del radio y las coordenadas del centro en la ecuación ordinaria de la circunferencia y elevar el radio al cuadrado.

2. Grafica una circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 = 36$.
   Apoyo:
   Recuerda que para graficar una circunferencia debes conocer el centro y su radio.
   Al observar la ecuación, nos damos cuenta de que corresponde a una circunferencia con centro en el origen, por lo tanto, las coordenadas del centro son $C(0,0)$ y el radio $r = \sqrt{36}$

3. Grafíca una circunferencia que tiene como ecuación $(\mathrm{x} - 4)^2 + (\mathrm{y} + 5)^2 = 25$.

Apoyo:

Para graficar una circunferencia debes conocer el centro y su radio. Y estos elementos los podemos deducir de la ecuación $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 25$ ya que la ecuación ordinaria es $(x - h)^2 + (y + k)^2 = r^2$, con centro $C(h - k)$ y $r^2 = 25$

4. Encuentra la ecuación ordinaria de una circunferencia que tiene como centro el punto C(3,2) y pasa por el punto P(1,-3).
   Apoyo:
   Debes encontrar el radio aplicando el procedimiento de distancia entre dos puntos y en seguida sustituir en la ecuación ordinaria, las coordenadas del centro y el valor del radio. Por último, elevar el radio al cuadrado.

5. Encuentra la ecuación general de la circunferencia que tiene como ecuación ordinaria $(x-4)^2+(y+5)^2=25$
   Apoyo:
   Para encontrar la ecuación general de la circunferencia debes desarrollar los cuadrados de los binomios de la ecuación ordinaria, ordenar términos, simplificar e igualar a cero.

6. Cuál es la ecuación general de una circunferencia cuyo diámetro está limitado por los puntos $A(-4,-3)$ y $B(2,-3)$.

   Apoyo:

   Para encontrar la ecuación debemos conocer el centro y su radio. El centro lo podemos encontrar utilizando el procedimiento de punto medio entre dos puntos y el radio con el procedimiento de distancia entre dos puntos, tomando el punto del centro y otro punto del extremo de su diámetro. Una vez que ya tenemos el centro y el radio, sustituimos sus valores, en la ecuación ordinaria de la circunferencia, desarrollamos los cuadrados de los binomios de la ecuación, ordenamos términos, simplificamos e igualamos a cero.

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico en una representación gráfica de circunferencia el centro, el radio y determino su ecuación.		
Puedo determinar la ecuación de una circunferencia si conozco los extremos de su diámetro.		
Sé obtener la ecuación de una circunferencia si conozco el centro y un punto por donde pasa.		
Puedo representar en el plano una circunferencia, si conozco su ecuación canónica u ordinaria.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- TecnoMáticas. (2019). Circunferencia. Ecuación CANONICA. (Explicación detallada). Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=f_7JxAuysVs
- Matemáticas profe Alex. (2016). Hallar la ecuación general de la CIRCUNFERENCIA conociendo el centro y el radio EJEMPLO 1. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=vQg3OSrR_Mw
- Matemáticas profe Alex. (2016). Conceptos básicos ecuación de la CIRCUNFERENCIA. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=vICf_JIwar4

Lección 10. Elementos de la parábola

Explorando

Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano y procede a unirlos con líneas:

A(-6,9)

B(-4,4)

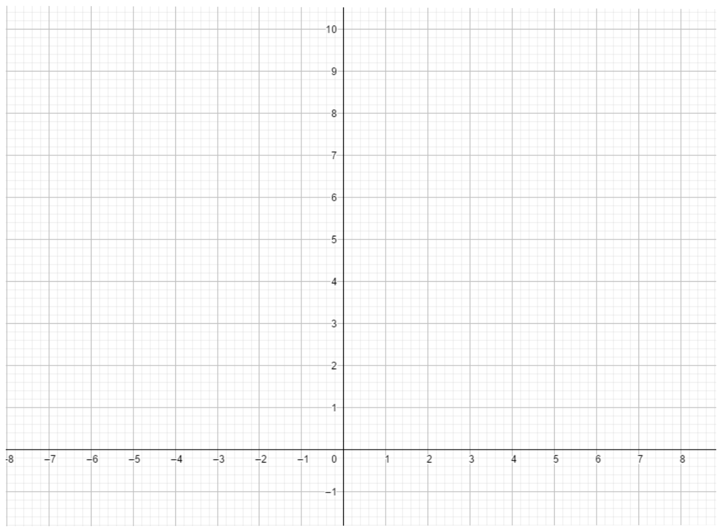
C(-2,1)

D(0,0)

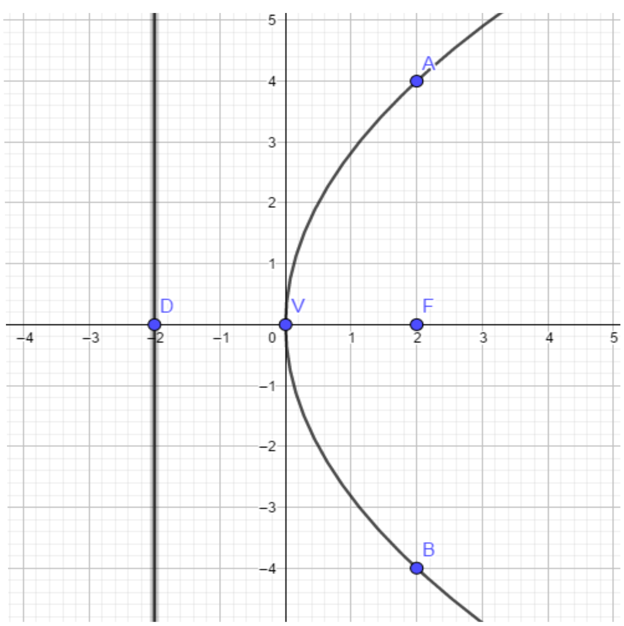
E(2,1)

F(4,4)

G(6,9)



Recordando el procedimiento de distancia entre dos puntos en la lección 2, calcular las siguientes distancias entre dos puntos, como se te pide a continuación:



$\overline{FV}$ = ________

$\overline{DV}$ = ________

$\overline{DF}$ = ________

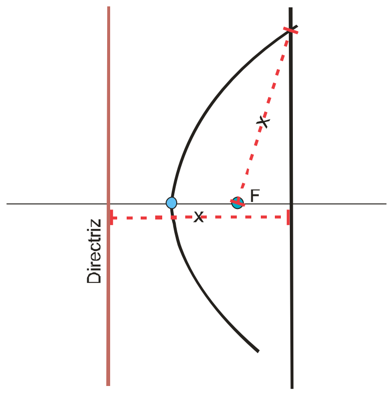
$\overline{AB}$ = ________

$\overline{AF}$ = ________

Comprendiendo

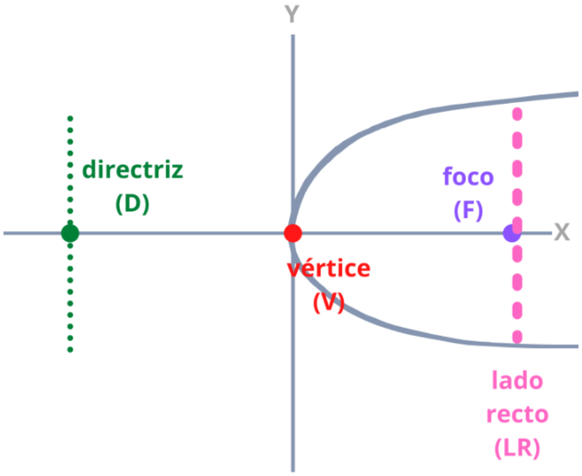
Elementos de la parábola

Parábola: es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo llamado foco, es igual a su distancia a una recta fija, denominada directriz.

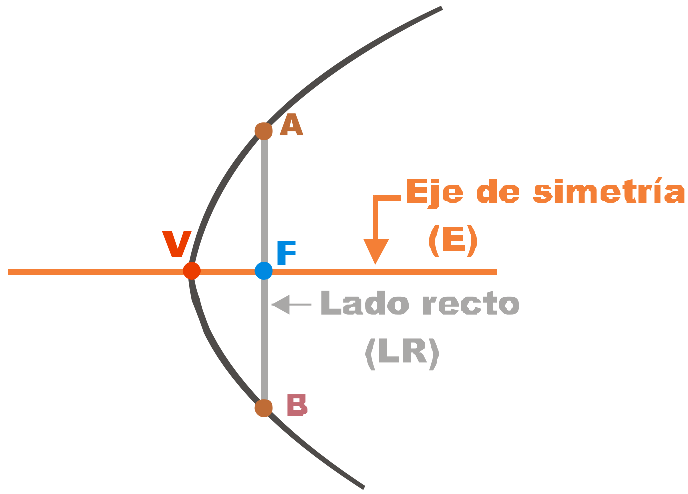


Elementos de una parábola

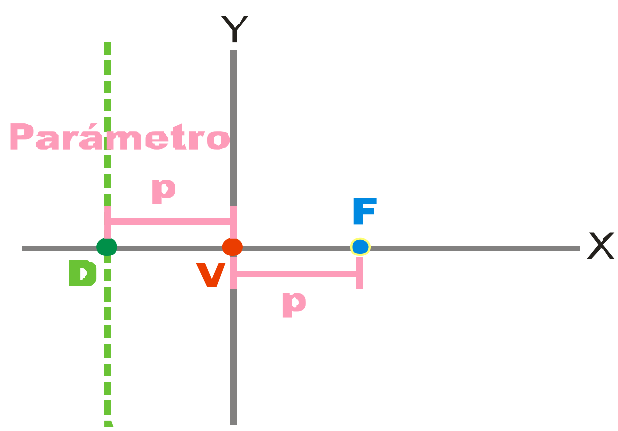
- Foco (***F***) es un punto fijo en el plano. Los puntos de la parábola equidistan del foco y la directriz, es decir que están a la misma distancia.
- Directriz (**D**) es la recta fija, que se encuentra frente al vértice.
- Eje (**E**) es la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco recibe el nombre de eje. Es el eje de simetría de la parábola.
- Vértice (**V**) es el punto medio entre el foco y la directriz. También se puede ver como el punto de intersección con el eje de simetría de la parábola.



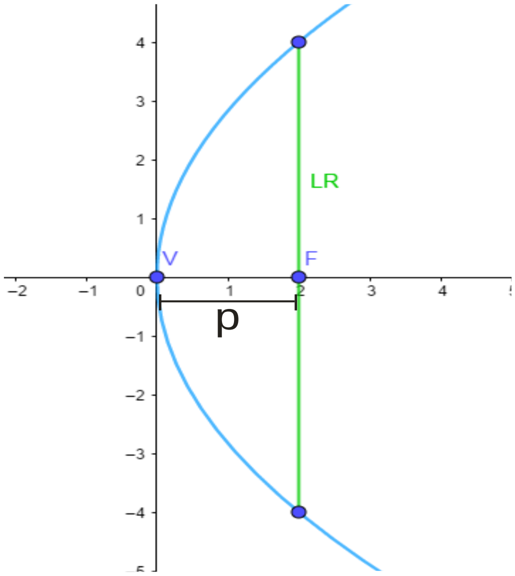
- Lado recto (**LR**).- Cuerda focal paralela a la directriz *"D"* y, por tanto, perpendicular al eje (E). Su longitud es 4 veces el parámetro, es decir, LR= 4p.
- Punto **A** y **B**.- Representan los **extremos** del lado recto (LR) y son puntos que pertenecen a la parábola. La distancia del foco (F) a uno de los puntos A o B es dos veces el parámetro (2p), por lo tanto la distancia del punto A al punto B, es cuatro veces el parámetro (4p).

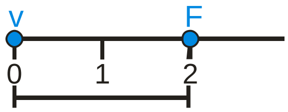


- Parámetro (**p**).- es la distancia "***p***", entre el vértice y el foco o del vértice a la directriz.



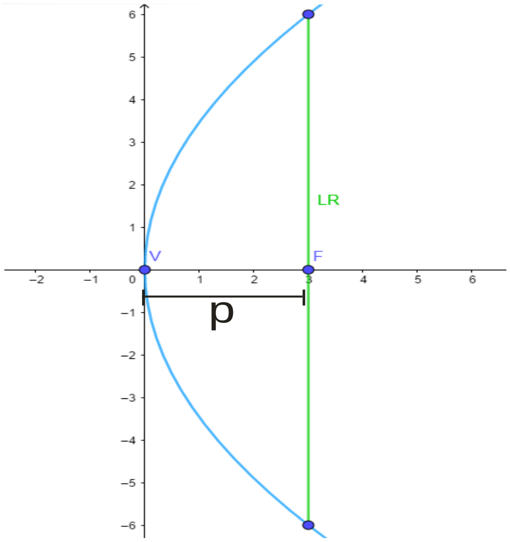
Como ya sabemos que la distancia entre el vértice y el foco corresponde al valor del parámetro (p)= d VF. Calculamos el valor del parámetro (p) y la longitud del lado recto en las siguientes parábolas:

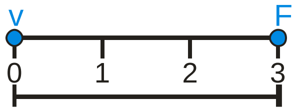




Parámetro (p)= 2

Longitud del LR= 4p =4(2) = 8

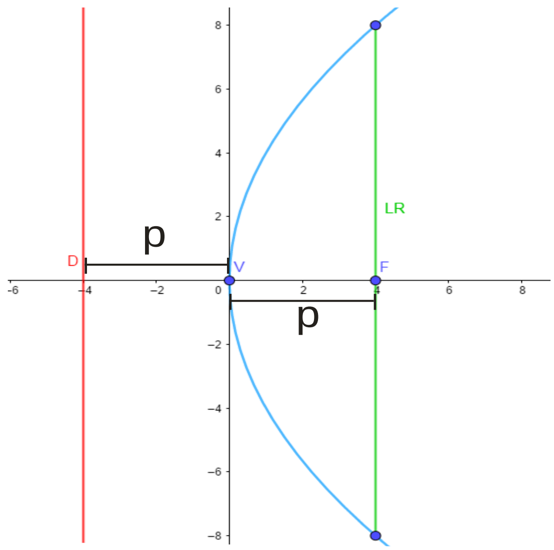


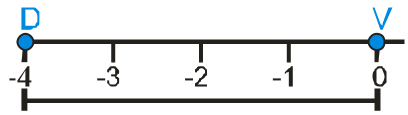


Parámetro (p)= 3

Longitud del Lado Recto (LR)= 4p =4(3) = 12

Conocemos también que la distancia del vértice (V) a la directriz (D), es el valor del parámetro (p).



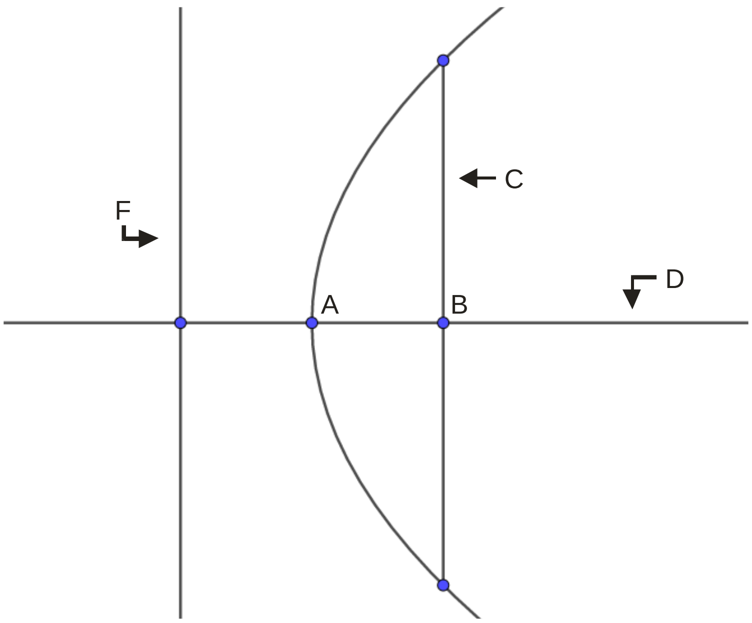


Parámetro (p)= 4

Longitud del LR= 4p =4(4) = 16

Practicando

1. **Identifica y coloca cada una de las letras en el nombre correcto, que corresponden a los elementos de la parábola**.

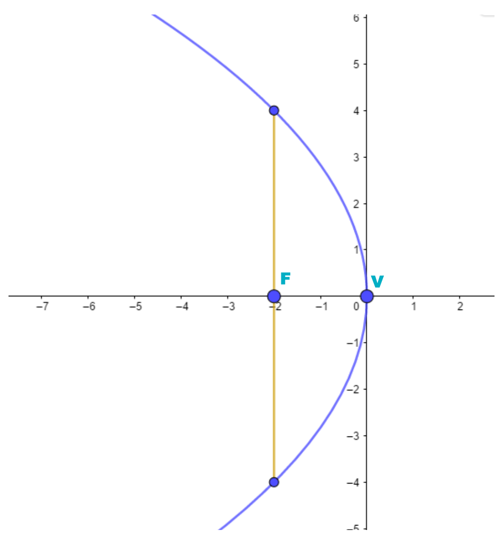


- ☐ Lado recto (LR)
- ☐ Directriz (D)
- ☐ Vértice (V)
- ☐ Foco (F)
- ☐ Eje de simetría (E)

2. **Calcula el valor del parámetro (p) y la longitud del lado recto (LR) de ésta parábola:**

p =

LR =



Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de identificar los elementos de la parábola.		
Identifico la ubicación de la directriz en una parábola		
Soy capaz de calcular el valor del parámetro (p) en una parábola		
Tengo la habilidad de determinar la longitud del lado recto de una parábola.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

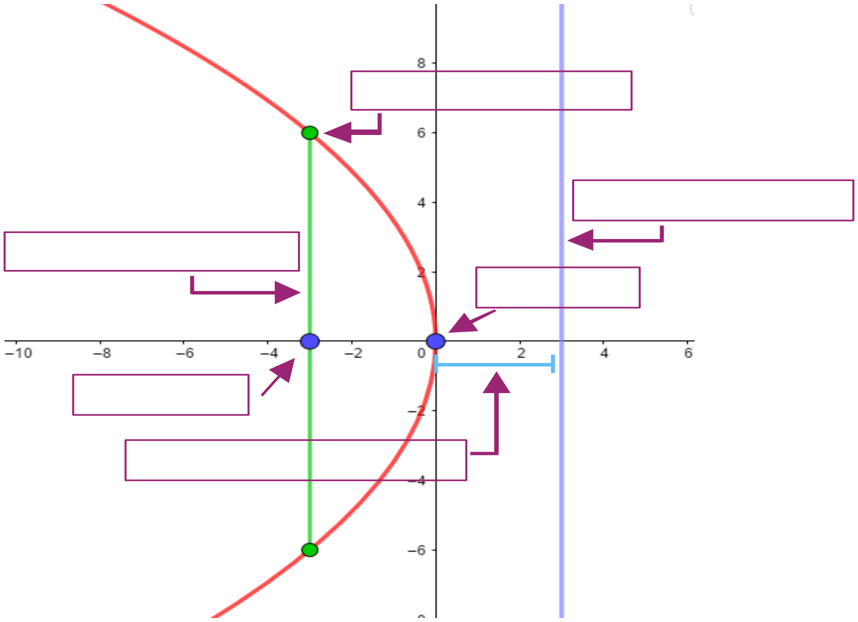
Te sugerimos consultar los siguientes recursos para ejercitar los elementos estudiados en esta lección:

- Math2me. José Alejandro Andalón Estrada. Concepto de parábola y sus elementos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=ZotsxMGf_ds
- Sites.google.com. La parábola [en línea]. Disponible en: https://sites.google.com/site/geometriaanalitica3o/la-parabola

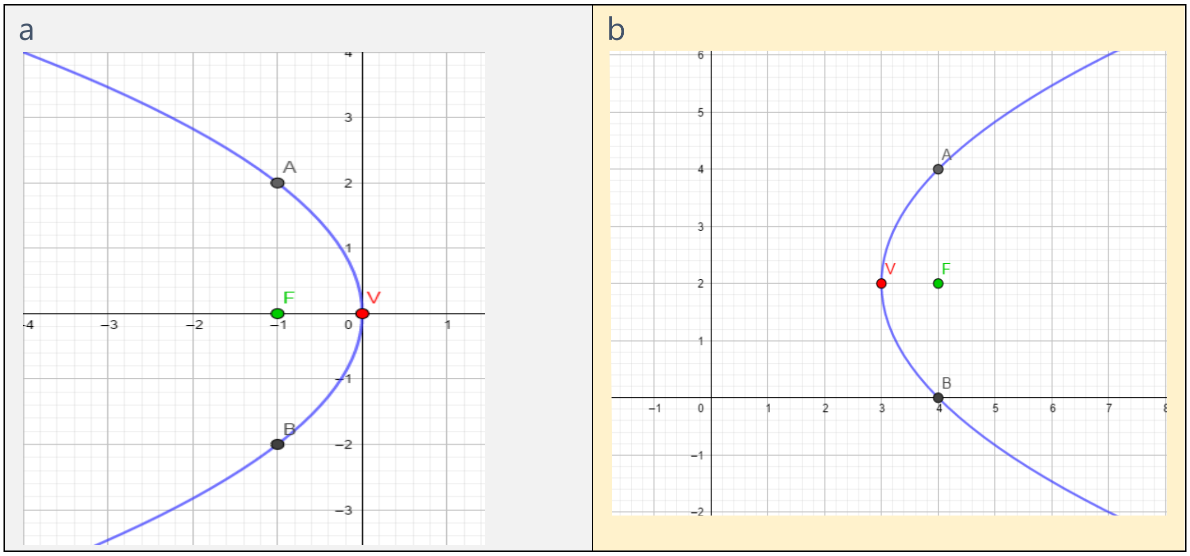
Lección 11. Ecuaciones de la parábola

Explorando

I. Identifica los elementos que componen a la parábola, escribiendo dentro del recuadro el nombre correspondiente.



II. Obtener las coordenadas de los siguientes puntos en las parábolas "a y b".



vértice (,) foco (,) punto A(,) punto B(,)	vértice (,) foco (,) punto A (,) punto B(,)

III. Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

$a)$ $(y-2)^2 =$

$b)$ $(x+3)^2 =$

IV. Factoriza por factor común las siguientes expresiones algebraicas:

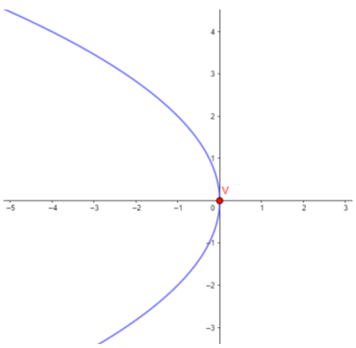
c) 4x+8=

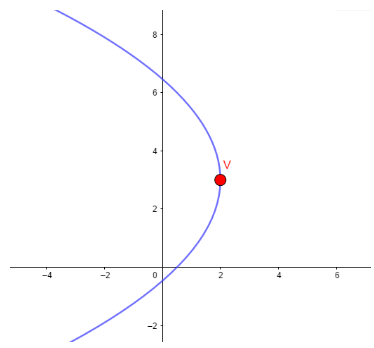
d) -8y+16=

Comprendiendo

Ecuaciones de una parábola

Para comprender el tema, señalamos que la parábola pasa por el vértice y abre hacia el foco, y que tenemos parábolas con vértice en el origen y parábolas con vértice fuera del origen.





Ecuaciones de parábolas con vértice en el origen

Existen dos ecuaciones para parábolas con vértice en el origen:

$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$
Parábolas horizontales	Parábolas verticales

Las parábolas horizontales con vértice (0,0) y eje de simetría x=0 son dos, una que abre a la derecha y otra a la izquierda, comparten la misma ecuación canónica **y^2=4px**, con diferencia de un signo negativo.

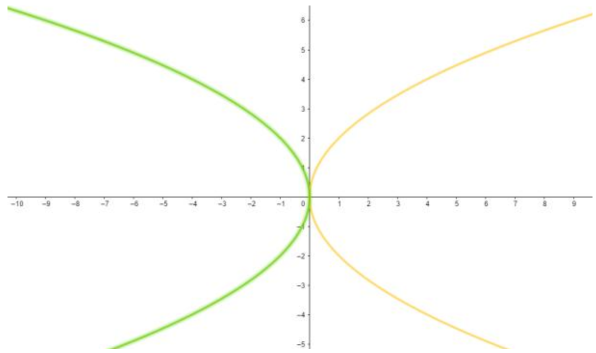
Las variables "**x**" y "**y**" son las coordenadas de cada punto por donde pasa la parábola, "**p**" es el parámetro (distancia del vértice al foco o del vértice a la directriz) y 4p es el valor del lado recto (LR).

$$\boldsymbol{y^2 = -4px}$$

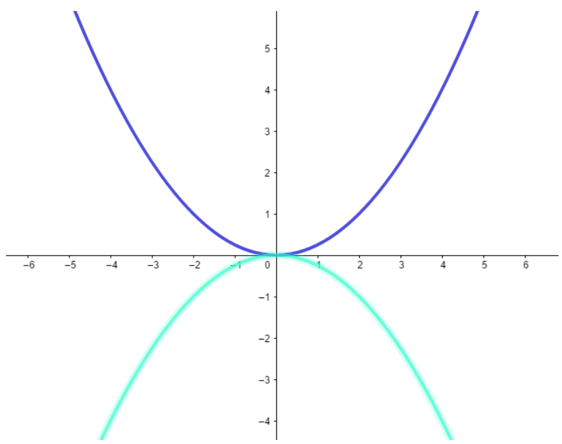
abre a la izquierda

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

abre a la derecha



Las parábolas verticales también son dos, una que abre hacia arriba y otra hacia abajo, de igual forma comparten la misma ecuación canónica **x^2=4py**, con diferencia de un signo negativo:



$$x^2 = 4py$$

abre a hacia arriba

$$x^2 = -4py$$

abre a hacia abajo

A partir de una ecuación general de la parábola, procedemos a graficar y determinar las coordenadas del foco (F), longitud del lado recto (LR) y las coordenadas de sus puntos (extremos) A y B, como también la ecuación de la directriz (D):

Ejemplo 1.- Ecuación de la parábola en su forma general y^2 - 8x=0

a) La ecuación general la pasamos a ecuación canónica, para esto observamos que variable está con exponente al cuadrado y la dejamos a la izquierda, el resto se traslada a la derecha, respetando la Ley de despejes.
y^2 = 8x
b) Observando esta nueva ecuación se asemeja a: **y^2 = 4px**, por lo tanto el número 8 representa a **4p** (longitud dl lado recto), además es positivo, por lo que determina

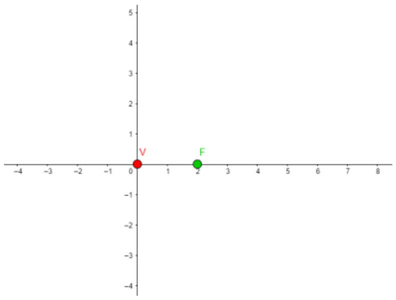
que abre a la derecha.

$4p=8$, despejamos a $p = \frac{8}{4} = 2$, $p=2$ (el parámetro (p) vale 2)

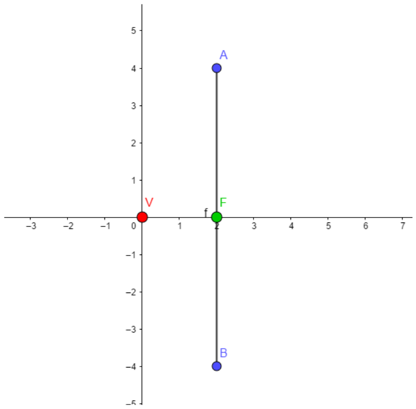
Longitud del lado recto $LR=4p=4(2)=8$

c) Recordando que el parámetro (p), es la distancia del vértice al foco y procedemos a graficar.

1.- El vértice se ubica en el origen y el foco lo ubicaremos a la derecha del vértice, a una distancia (p), a 2 unidades.

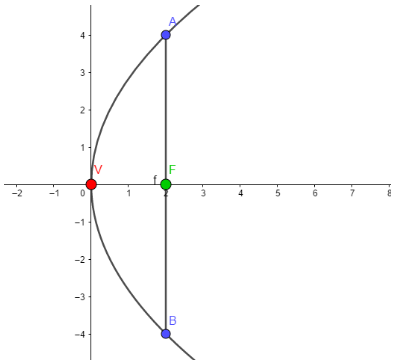


2.- El $LR=4p=8$, el foco es el punto medio del lado recto, por lo tanto cada extremo (punto A y B) de este segmento de recta, se encuentra a **2p** del foco, $2p=2(2)=4$



3.- Unimos con líneas curvas los punto A y B con el vértice y se representa la parábola que resulta de la ecuación $y^2-8x=0$; las coordenadas que se solicitan son:

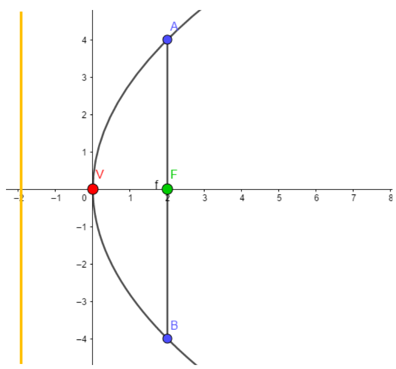
V(0,0)
F(2,0)
punto extremo A(2,4)
punto extremo B(2,-4)
LR=8



d) La **ecuación de la directriz**, se determina con dos factores, el primero es la variable del eje que cruza (x ó y); el segundo factor, es el punto en donde cruza la directriz al eje de las ordenadas(Y) o de las abscisas(X).

1.- Para parábolas horizontales $\mathbf{y^2=4px}$, la ecuación de la directriz es: **x=intersección con el eje de las abscisas(x).** Es paralela al eje de las ordenadas (y).

2- Para la verticales $\mathbf{x^2=4py}$ la ecuación es: **y=intersección con el eje de la ordenadas(y).** Es paralela al eje de las abscisas(x).



Ejemplo 1.- La directriz se localiza a una distancia del vértice p=2: y cruza al eje X en el punto -2 por lo tanto:

Ecuación de la directriz $x=-2$

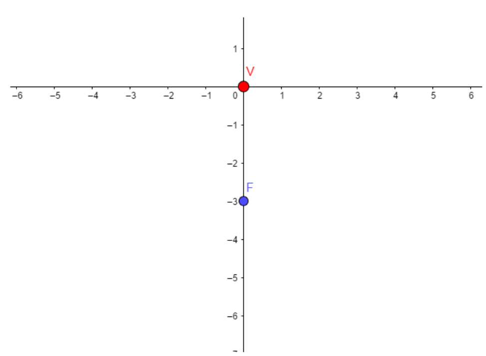
Ejemplo 2.- Ecuación de la parábola en su forma general $x^2 + 12y=0$

a) Despejamos a x^2, $x^2 = -12y$, se observa que se asemeja a la fórmula $\mathbf{x^2=-4py}$, para lo cual podemos concluir que se trata de una parábola vertical que abre hacia abajo.

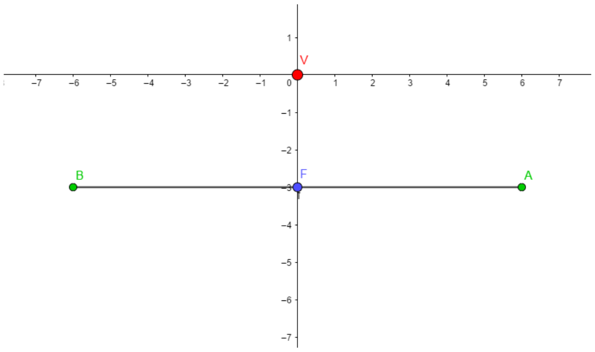
b) $x^2 = -12y$, identificamos que $4p=12$, $p=\frac{12}{4} = 3$, por lo tanto el parámetro (p)=3. El signo menos no se toma en cuenta para los cálculos, recuerda que las distancias son absolutas (sin signo), en este caso el signo solo se tomó para definir hacia donde abre la parábola.

c) Procedemos a localizar al vértice, foco y los puntos extremos(puntos A y B) del lado recto:

1.- Ubicamos al vértice en el origen y como es una parábola vertical y abre hacia abajo, el foco lo localizamos por debajo del vértice a una distancia p=3



2.- LR=4p=12, por lo que los puntos extremo (puntos A y B) de este lado recto, se encuentran a 2p=2(3)=6 unidades del foco.



3.- Unimos los puntos A y B con el vértice y obtenemos un bosquejo de la parábola, las coordenadas son las siguientes:

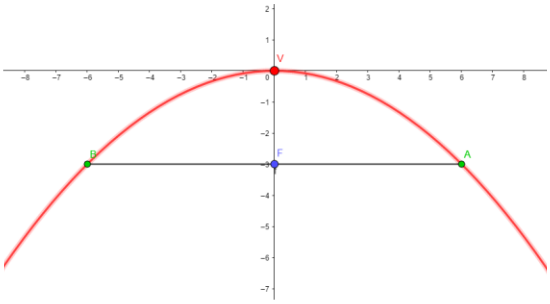
V(0,0)

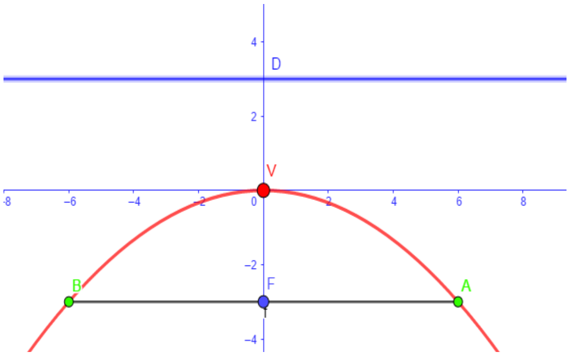
F(0,-3)

Punto extremo A(6,-3)

Punto extremo B(-6,-3)

LR=12

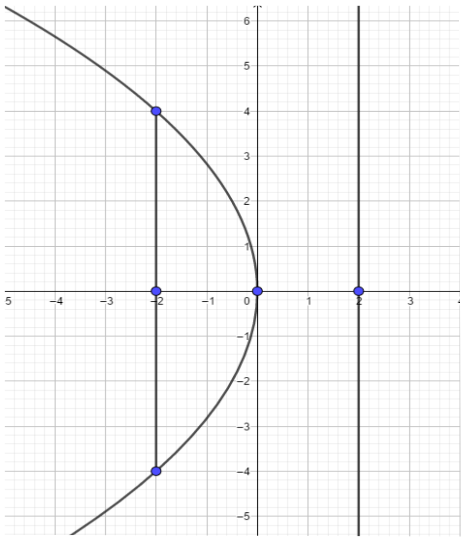




Ejemplo 2.- La directriz es paralela al eje de las abscisas, se localiza a una distancia del vértice p=3: y cruza al eje Y en el punto 3

Ecuación (Ec.) de la directriz y=3

Encontramos las ecuaciones canónica y general de la parábola en cada una de las siguientes gráficas.



Gráfica A

Análisis de la gráfica (A):

1. El vértice se localiza en el origen

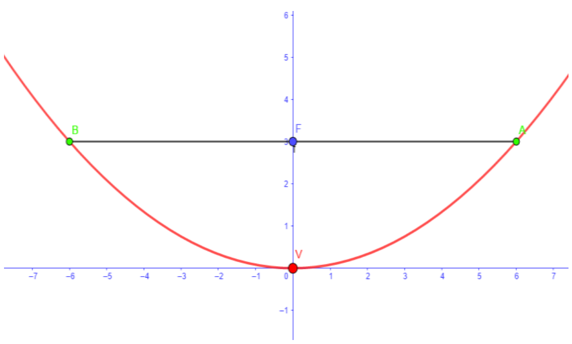
2. La distancia del vértice al foco(F)=2, por lo tanto p=2 (parámetro vale 2) y LR= 4p = 4(2) = 8,

3. Es una parábola horizontal que abre a la izquierda, por tanto corresponde a la ecuación:

$y^2 = -4px$ sustituimos valores 4p=8
$y^2 = -(8)x$

Ecuaciones de la parábola:
Canónica $y^2 = -8x$

General $y^2 + 8x = 0$



Gráfica B

Análisis de la gráfica (B):

1. El vértice se localiza en el origen

2. La distancia del vértice al foco=3, por lo tanto p=3 (parámetro vale 3) y LR=4p=4(3)=12

3. Es una parábola vertical que abre hacia arriba, por tanto corresponde a la ecuación

$x^2 = 4py$ sustituimos valores 4p=12
$x^2 = (12)y$

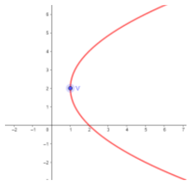
Ecuaciones de la parábola:
Canónica $x^2 = 12y$

General $x^2 - 12y = 0$

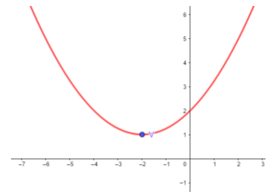
Ecuaciones de parábolas con vértice fuera del origen

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ parábolas horizontales	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ parábolas verticales

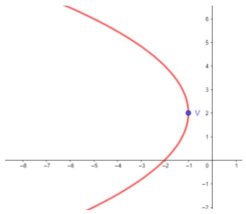
En donde ***h*** y ***k*** corresponden a las coordenadas del vértice (*h, k*)



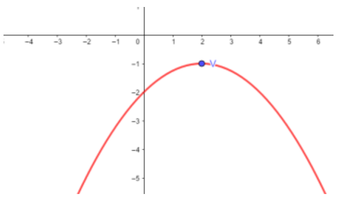
$(y-k)^2= 4p(x-h)$



$(x-h)^2=4p(y-k)$



$(y-k)^2= - 4p(x-h)$



$(x-h)^2=-4p(y-k)$

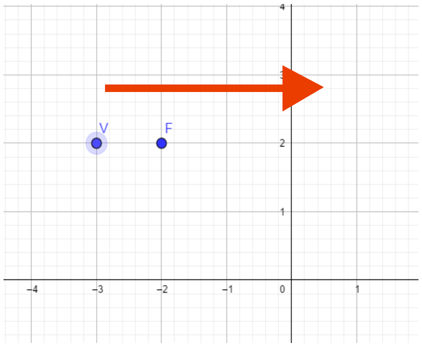
Nota: se observa que **h** es acompañada con **x**, **k** es acompañada con **y**

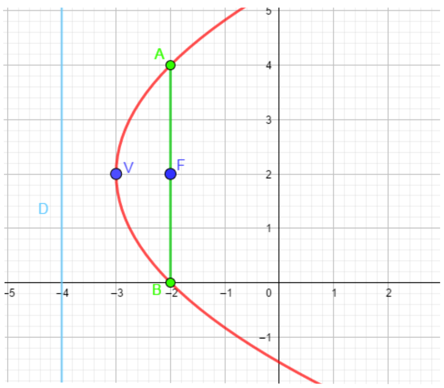
Estudiemos **parábolas horizontales**:

$(y-k)^2= -4p(x-h)$	$(y-k)^2= 4p(x-h)$
• Abre a la izquierda • Coordenadas del vértice (h , k) • Coordenadas del foco (h+p , k) • Lado recto=$\|4p\|$ • Ecuación de la directriz x=h-p	• Abre a la derecha • Coordenadas del vértice (h , k) • Coordenadas del foco (h+p , k) • Lado recto=$\|4p\|$ • Ecuación de la directriz x=h-p

Utilicemos estos conocimientos para comprender los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.- Obtenemos las <u>ecuaciones</u> de la parábola en su forma <u>canónica y general</u>, longitud del lado recto y ecuación de la directriz, cuyo vértice se localiza en el punto V(-3,2) y el foco F(-2,2).





Procedemos a localizar los puntos vértice (V) y foco (F) en el plano cartesiano. Con esto observamos que la parábola abre a la derecha y si analizamos nuestras 2 ecuaciones para parábolas horizontales con vértice fuera del origen, le corresponde la ecuación: $\mathbf{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$

Como vértice(-3,2), entonces h=-3 y k=2

Sustituimos los valores de h y k, en la ecuación.

$(y - (2))^2 = 4p(x - (-3))$

$(y - 2)^2 = 4p(x + 3)$

Con ayuda del plano cartesiano, se observa que la distancia del vértice al foco es de 1, en caso de que se dificulte el cálculo, recurrir a la fórmula de distancia entre dos puntos (lección 2), por lo tanto p=1, parámetro (p)=1,

LR=4p=4(1)=4, LR= 4, sustituimos a 4p=4 en la ecuación $(y - 2)^2 = 4p(x + 3)$ … $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$

Ecuación canónica $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$

La ecuación de la directriz es:

x=h-p, h=-3 y p=1

x=-3-1, x=-4

Para obtener la ecuación general de esta parábola, desarrollamos el binomio al cuadrado de la ecuación canónica $\mathbf{(y - 2)^2} = 4(x + 3)$.

$\mathbf{(y - 2)^2} = (y)^2 - 2(y)(2) + (2)^2 = \mathbf{y^2 - 4y + 4}$, sustituimos este resultado por el binomio al cuadrado en la ecuación canónica $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$. …..$y^2 - 4y + 4 = 4(x + 3)$.

Realizamos la multiplicación de lado derecho de la ecuación y resulta: $y^2 - 4y + 4 = 4x + 12$

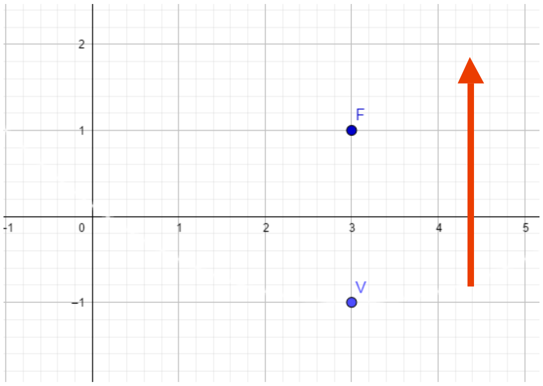
Igualamos a cero la ecuación y simplificamos: $y^2 - 4y + 4 - 4x - 12 = 0$ …. $y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$

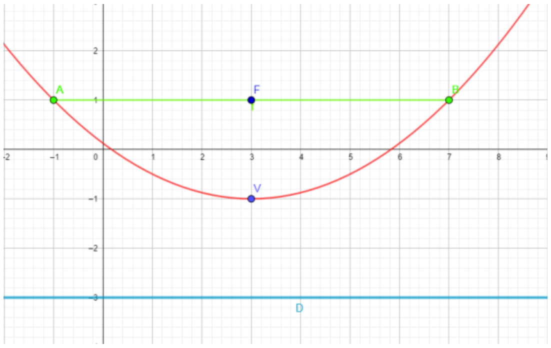
Ecuación general $y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$

Estudiemos **parábolas verticales**:

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
• Abre hacia abajo • Coordenadas del vértice (h , k) • Coordenadas del foco (h , k+p) • Lado recto=$\|4p\|$ • Ecuación de la directriz y=k-p	• Abre hacia arriba • Coordenadas del vértice (h , k) • Coordenadas del foco (h , k+p) • Lado recto=$\|4p\|$ • Ecuación de la directriz y=k-p

Ejemplo 2.- Encontrar la ecuación de la parábola en su forma canónica y general, longitud del lado recto y ecuación de la directriz, cuyo vértice se localiza en el punto V(3,-1) y el foco F(3,1).





Procedemos a localizar los puntos vértice (V) y foco (F) en el plano cartesiano. Con esto observamos que la parábola abre a hacia arriba y si analizamos nuestras 2 ecuaciones para parábolas verticales con vértice fuera del origen, le corresponde la ecuación:
$(x - h)^2 = 4p(y – k)$.

Como vértice(3,-1) entonces h= 3 y k= -1
Sustituimos los valores de h y k, en la ecuación.
$(x – (3))^2 = 4p(y –(-1))$

$(x - 3)^2 = 4p(y + 1)$

Con ayuda del plano cartesiano, se observa que la distancia del vértice al foco es de 2, en caso de que se dificulte el cálculo, recurrir a la fórmula de distancia entre dos puntos (lección 2), por lo tanto p=2, (parámetro vale 2)
LR = 4p =4(2)= 8
LR= 8, sustituimos a 4p=8 en la ecuación
$(x - 3)^2 = 4p(y + 1)$ …. .. $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$

<u>Ecuación canónica</u> $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$

La <u>ecuación de la directriz</u> es:
y=k-p, k=-1 y p=2
y=-1-2, y=-3

Para la ecuación general, desarrollamos el binomio al cuadrado de la ecuación canónica (Realizar el mismo procedimiento que en el ejemplo 1 de estas ecuaciones).

$(x - 3)^2$ $= 4(y + 1)$

$(x - 3)^2$ $= x^2 - 6x + 9$, sustituimos este resultado por el binomio al cuadrado en la ecuación canónica $(x - 3)^2 = 4(y + 1)$ .... $x^2 - 6x + 9 = 4(y + 1)$

Realizamos la multiplicación de lado derecho de la ecuación y resulta: $x^2 - 6x + 9 = 4y + 4$

Igualamos a cero la ecuación y simplificamos: $x^2 - 6x + 9 - 4y - 4 = 0$ ... $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

<u>Ecuación general</u> $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

Partiendo de la ecuación general de la parábola con vértice fuera del origen, obtendremos todos sus elementos:

Ejemplo 1.- Ecuación general $y^2 + 8y - 4x + 32 = 0$

1. Identificamos la variable que está al cuadrado.	y^2
2. Todos los términos que incluyen la variable identificada, los mantenemos a la izquierda y el resto los pasamos a la derecha de la igualdad aplicando ley de despejes.	$y^2 + 8y - 4x + 32 = 0$ $y^2 + 8y = 4x - 32$
3. Del lado izquierdo contamos con dos términos y procedemos a completar el trinomio cuadrado perfecto con el siguiente procedimiento: a) Se toma el coeficiente numérico del término cuya variable no está al cuadrado (8y) y se divide entre dos. b) A este resultado(4) se eleva al cuadrado $4^2 = 16$ c) El resultado de elevar al cuadrado (16) se suma a ambos lados de la ecuación.	$y^2 + 8y = 4x - 32$ $y^2 + 8y + 16 = 4x - 32 + 16$ $\frac{8}{2} = 4$ $(4)^2 = 16$

4. Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto y reducimos los términos de la derecha. a) Se toman los términos 1 y 3 de la ecuación $y^2 + 8y + 16$ b) Se saca raíz cuadrada a ambos términos $\sqrt{y^2} = y$, $\sqrt{16} = 4$ Los resultados se colocan entre paréntesis y se eleva al cuadrado, el signo que los separa se toma del 2° término de la ecuación y^2 **+ 8y** + 16 que es signo + c) Se reducen los términos que se encuentran a la derecha $4x - 32 + 16 = 4x - 16$	$y^2 + 8y + 16 = 4x - 32 + 16$ $(y + 4)^2 = 4x - 32 + 16$ $(y + 4)^2 = 4x - 16$
5. Factorizamos por factor común a los términos que se encuentran a la derecha de la igualdad con el fin de que quede en este caso, la variable x, con coeficiente numérico de 1.	$(y + 4)^2 = 4x - 16$ $4\left(\frac{4x}{4} - \frac{16}{4}\right) = 4(x - 4)$ Sustituimos en la ecuación $(y + 4)^2 = 4x - 16$ $(y + 4)^2 = 4(x - 4)$ <u>Ecuación canónica</u>

Nota: Para obtener los valores correctos de **h** y **k,** al observar una ecuación de parábola con vértice fuera del origen, considerar que si se expresan en la ecuación con signo negativo, se toma como positivo y si están con signo positivo se toma con signo negativo:

Ejemplos:

a.- $(y - 2)^2 = 8(x-5)$, h= 5 y k=2 esto significa que las coordenadas del vértice (5,2)

b.- $(y + 6)^2 = 12(x-7)$, h= 7 y k=-6 esto significa que las coordenadas del vértice (7,-6)

c.- $(y + 2)^2 = 4(x+3)$, h= -3 y k=-2 esto significa que las coordenadas del vértice (-3,-2)

d.- $(x+5)^2 = 10(y+3)$, h=-5 y k=-3 significa que las coordenadas del vértice (-5,-3) e.- $(x-6)^2 = 10(y+1)$, $h=6$ y $k=-1$ significa que las coordenadas del vértice (6,-1)

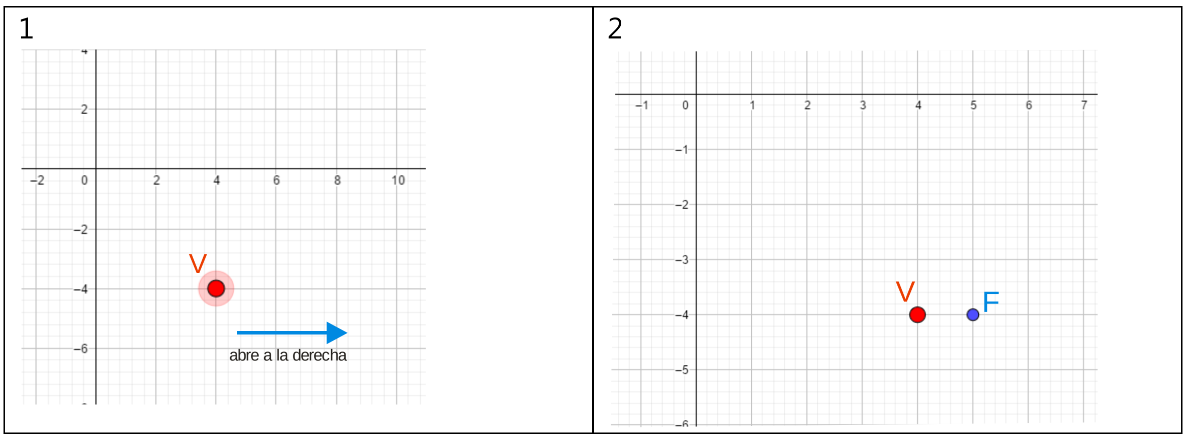
Con la ecuación canónica $(y + 4)^2 = 4(x - 4)$, procedemos a identificar los valores de:

$h=4$ y $k=-4$, de esta forma las coordenadas del vértice $V(h, k) = V(4, -4)$

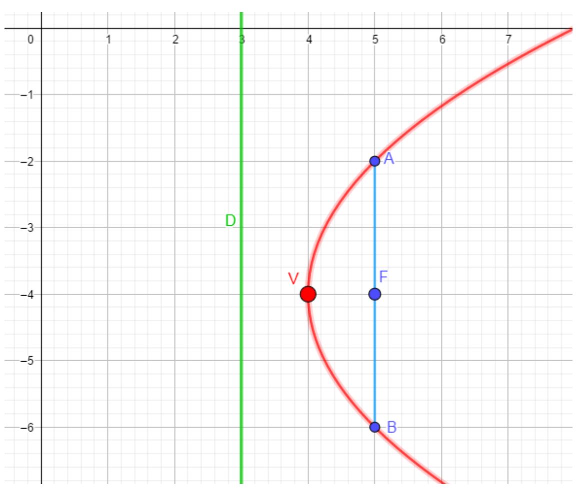
Comparando la ecuación canónica $(y + 4)^2 = 4(x - 4)$, con las ecuaciones de parábolas verticales u horizontales con vértice fuera del origen, encontramos que es horizontal y abre a la derecha $(y-k)^2= 4p(x-h)$, además se observa que $4p=4$, por lo que espejamos a la variable "p" (parámetro).

$4p= 4$, $p=\frac{4}{4} = 1$, $p=1$ (parámetro vale 1)

Nos apoyamos en el plano cartesiano, ubicando al vértice y empleando el valor de (p), para localizar el foco, ya que sabemos que abre a la derecha.



Ubicamos el resto de los elementos de la parábola



V(4,-4)
F(5,-4)
LR=4
Extremo A(5,-2)
Extremo B(5,-6)

Ecuación de la directriz
$x=h-p$, $h=4$ y $p=1$
$x=4-1$, $x= 3$

Ejemplo 2.- Ecuación general $x^2 + 6x - 4y + 25=0$

1. Identificamos la variable que está al cuadrado.	x^2
2. Todos los términos que incluyen la variable identificada, los mantenemos a la izquierda y el resto pasan a la derecha de la igualdad.	$x^2 + 6x = 4y - 25$
3. Se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto con el siguiente procedimiento: a) Se toma el coeficiente numérico del término cuya variable no está al cuadrado (6x) y se divide entre dos. b) A este resultado(3) se eleva al cuadrado $3^2 = 9$ c) El resultado de elevar al cuadrado (9) se suma a ambos lados de la ecuación	$x^2 + 6x + 9 = 4y - 25 + 9$ $\frac{6}{2} = 3$ $(3)^2 = 9$
4. Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto y simplificamos los términos de la derecha. a) Se toman los términos 1 y 3 de la ecuación $x^2 + 6x + 9$ b) Se saca raíz cuadrada a ambos términos $\sqrt{x^2} = y, \quad \sqrt{9} = 3$ Los resultados se colocan entre paréntesis y se eleva al cuadrado, el signo que los separa se toma del 2° término de la ecuación $x^2 + 6x + 9$ que es signo + c) Se reducen los términos que se encuentran a la derecha $4y - 25 + 9 = 4x - 16$	$x^2 + 6x + 9 = 4y - 25 + 9$ $(x + 3)^2 = 4y - 25 + 9$ $(x + 3)^2 = 4y - 16$

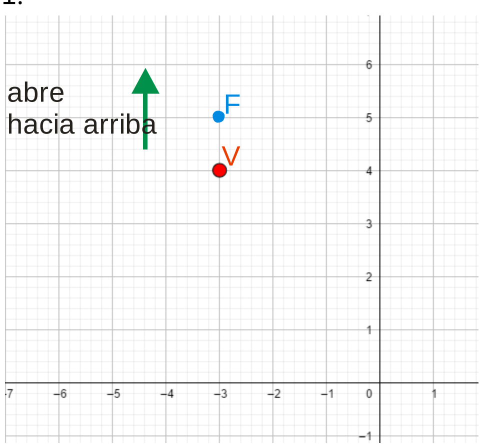
5. Factorizamos por factor común a los términos que se encuentran a la derecha de la igualdad con el fin de que quede en este caso, la variable **y**, con coeficiente numérico de 1.	$(x + 3)^2 = 4y - 16$ $4\left(\frac{4y}{4} - \frac{16}{4}\right) = \mathbf{4(y-4)}$ Sustituimos en la ecuación $(x + 3)^2 = 4y - 16$ $(x + 3)^2 = 4(y - 4)$ Ecuación canónica

Comparando la ecuación canónica $(x + 3)^2 = 4(y - 4)$, con las ecuaciones de parábolas verticales u horizontales con vértice fuera del origen, encontramos que es vertical y abre hacia arriba $(x-h)^2= 4p(y-k)$, además se observa que 4p=4, por lo que espejamos a la variable (p).

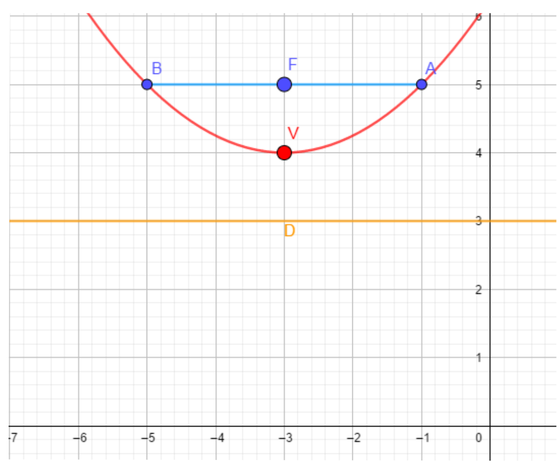
$4p= 4$, $p=\frac{4}{4} = 1$, $p=1$ (parámetro vale 1)

Nos apoyamos en el plano cartesiano, ubicando al vértice y empleando el valor de (p), para localizar el foco, ya que sabemos que abre hacia arriba.

1.



2. Ubicamos el resto de los elementos de la parábola,



V(-3,4)
F(-3,5)
Ecuación de la directriz
$y=k-p$, $k=4$ y $p=1$
$y=4-1$, $y=3$

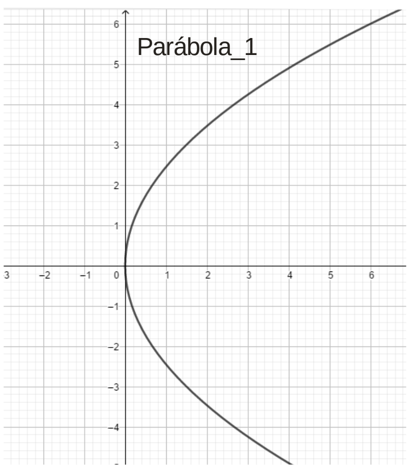
LR=4
Extremo A(5,-2)
Extremo B(5,-6)

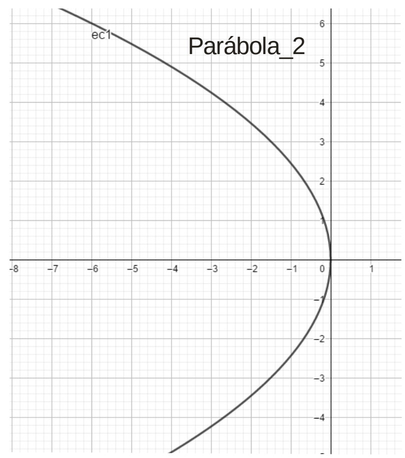
Practicando

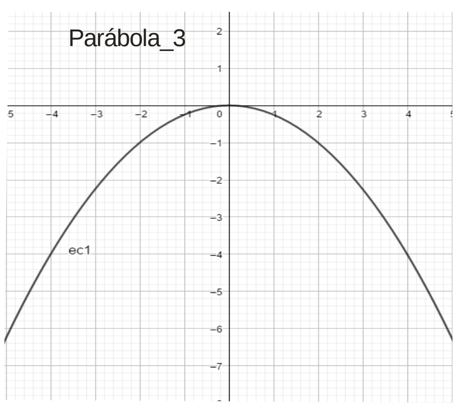
1.- Escribe en cada ecuación el número de la parábola que le corresponde.

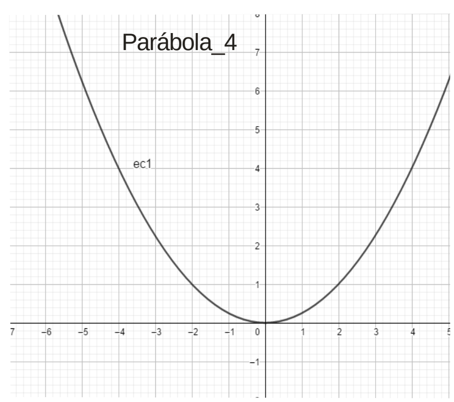
$x^2 = 4py$ ____________________ $y^2 = 4px$ ____________________

$y^2 = -4px$ ____________________ $x^2 = -4py$ ____________________

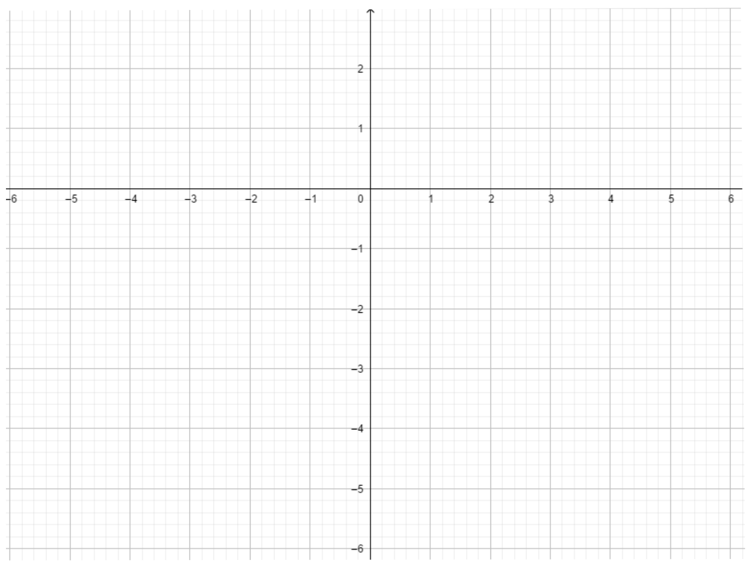




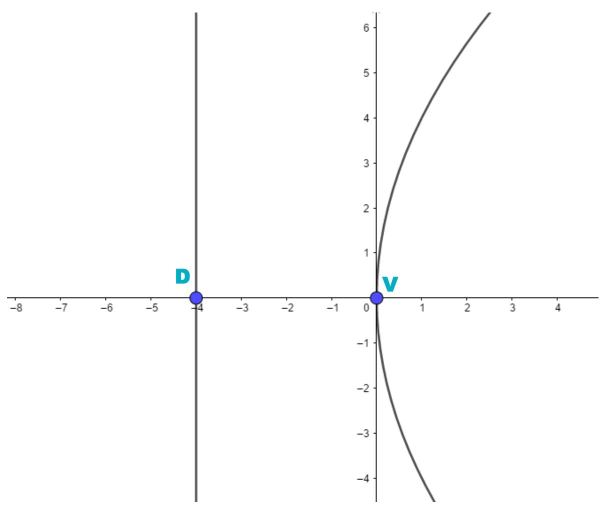




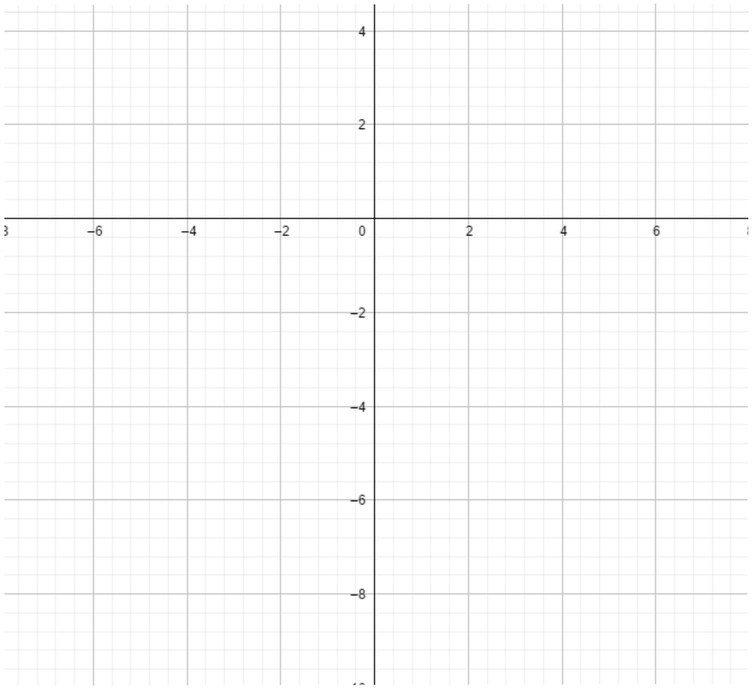
2.- Con la ecuación general de la parábola $x^2 + 16y = 0$, con vértice en el origen, obtener las coordenadas del foco, longitud del lado recto, coordenadas de sus puntos extremos(A y B) y la ecuación de la directriz.



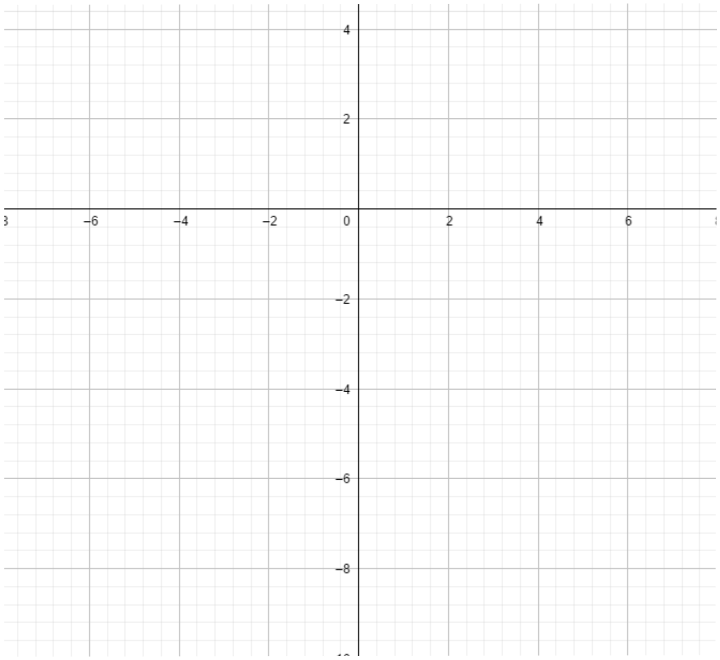
3.- Obtener las ecuaciones canónica y general de la parábola, al conocer su gráfica.



4.- Encontrar la ecuación de la parábola en su forma canónica y general, longitud del lado recto y ecuación de la directriz, cuyo vértice se localiza en el punto V(5,-3) y el foco F(3,-3).



5.- **De la ecuación general de la parábola $x^2 - 4x - 8y - 44 = 0$, con vértice fuera del origen, calcular las coordenadas del vértice, foco, puntos extremos del lado recto y la ecuación de la directriz.**



Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de identificar las 4 ecuaciones de parábola con vértice en el origen.		
Logro encontrar los elementos de la parábola con vértice en el origen, con solo conocer su ecuación general.		
Soy capaz de obtener las ecuaciones canónica y general de la parábola, conociendo su gráfica.		
Logro obtener las ecuaciones canónica y general de la parábola con vértice fuera del origen, conociendo sólo las coordenadas del vértice y foco.		
Soy capaz de encontrar todos los elementos de la parábola conociendo su ecuación general de parábola con vértice fuera del origen		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para ejercitar los elementos estudiados en esta lección:

- Math2me. José Alejandro Andalón Estrada. Concepto de parábola y sus elementos. Disponible en; https://www.youtube.com/watch?v=ZotsxMGf_ds

- Sites.google.com. La parábola. Disponible en; https://sites.google.com/site/geometriaanalitica3o/la-parabola
- Profesor Alex. Ecuaciones de la parábola. Disponible en; https://www.youtube.com/watch?v=sTNElp7h6wY
- Profesor en línea. Ecuaciones de la parábola. Disponible en: https://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuacion_parabola.html.

Referencias

- Content. (s. f.). Forma Punto-Pendiente y Forma Estándar de Ecuaciones Lineales. [en línea]. Disponible en: https://content.nroc.org/Algebra.HTML5/U04L1T4/TopicText/es/text.html#:~:text=Un%20tipo%20de%20ecuaci%C3%B3n%20lineal,son%20las%20coordenadas%20del%20punto. (Consultado el 17 de septiembre de 2020).
- Cuéllar Carvajal, Juan Antonio. (2012). Geometría Analítica [en línea]. Disponible en: https://elibro.net/es/lc/uemstaycm/títulos/37435?login=Uemstaycm&password=mhe2020 (Consultado el 13 agosto de 2020).
- Fuenlabrada de la Vega S. (2016). Geometría Analítica. México: MCGRAW HILL.
- Geogebra (s. f.). Simulador de pendientes [en línea]. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/gqdsa6xt (Consultado el 17 de septiembre de 2020).
- Lehmann, CH. (1989). Geometría Analítica. México: Editorial LIMUSA S. A. de C. V.
- Lifeder.com. ¿Cuáles son los elementos de una parábola? [En línea]. https://www.lifeder.com/elementos-parabola/ (Consultado el 11 agosto de 2020).
- Luyo Sanchez, Jose Raul (s/f). Quinta semana, La Recta en el Plano Cartesiano [en línea]. Disponible en: https://sites.google.com/site/matepreusil/mate-precpel/semana-1/la-recta-en-el-plano-cartesiano (Consultado el 17 de septiembre de 2020).
- Aguilar Márquez, Arturo y Fabián V. Bravo Vázquez, Hernán A. Gallegos Ruiz, Miguel Cerón Villegas, Ricardo Reyes Figueroa (2015). Matemáticas simplificadas. CONAMAT. 2da edición. México.
- MiProfe.com (s/f) Ecuación de la recta en su forma pendiente – intersección [en línea]. Disponible en: https://miprofe.com/ecuacion-de-la-recta-en-su-forma-pendiente-interseccion/ Consultado el 17 de septiembre de 2020).
- Salazar Puente, Ricardo Antonio (2015). Matemáticas III, Telebachillerato [en línea]. https://www.conaliteg.sep.gob.mx/telebachillerato.html (Consultado el 25 agosto de 2020).
- Salazar Vázquez, Pedro y Magaña Cuellar, Luis (2005). Matemáticas III. Editorial Colección Ciencia Educativa.
- Simulador de Geogebra (s. f.). Simulador de pendientes [en línea]. Disponible

en: https://www.geogebra.org/m/gqdsa6xt (Consultado el 01 de septiembre de 2020).

- Slideshare (s.f.). Área de un polígono en función de las coordenadas, [en línea]. Disponible en: https://es.slideshare.net/mariovallesmendoza/rea-de-un-poligono-en-funcion-de-las-coordenadas-de-sus-vertices-37163419 (Consultado el 17 de septiembre de 2020).
- Slideshare (s.f). Perímetro de un polígono dados los vértices [en línea] Disponible en: https://es.slideshare.net/neroberial/permetro-de-un-polgono-en-un-plano-cartesiano (Consultado el 14 de septiembre de 2020).
- Swokowski, E. et al. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. XII edición. México: Editorial Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- Universo ffórmulas.com. Elementos de una parábola [en línea]. Disponible en: https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/elementos-parabola/ (Consultado el 11 agosto de 2020).
- Wikipedia (s.f.). Fórmula del área de Gauss [en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_del_%C3%A1rea_de_Gauss (Consultado el 15 de septiembre de 2020).
- Wikipedia (s. f.). Rectas [en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Recta (Consultado el 17 de septiembre de 2020).
- Wikipedia (s.f.). Pendiente [en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Pendiente_(matem%C3%A1ticas) (Consultado el 01 de septiembre de 2020).
- Imágenes tomadas de www.flaticon.es, www.pixabay.com, www.freepik.es y de calculadora gráfica. Geogebra https://www.geogebra.org/calculator